平成 28 年度 数学演習第一
演習第 9 回 (7 月 13 日 実施分) 微積：漸近展開, 積分の計算 (1) 解答例

$\boxed{1}$ (以下，本問でランダウの o を使うときはいつも，$(x \to 0)$ を省略している．)

(1) $5^x = e^{x\log_e 5}$ より, (c) 式の x を $x\log_e 5$ に置き換えて,

$$5^x \quad = \quad 1 + (\log_e 5)x + \frac{(\log_e 5)^2}{2}x^2 + \frac{(\log_e 5)^3}{6}x^3 + \frac{(\log_e 5)^4}{24}x^4 + o(x^4).$$

(2) (a) 式で $\alpha = -\frac{1}{2}$ として，$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$．$x$ を $-x^2$ に置き換えて，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)$.

(3) (c) 式の x を $-x$ に置き換えて, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. よって, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ より

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{1}{2}\left\{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right\} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).\end{aligned}$$

(4) $\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x}$. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$. $\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)$ だから，$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{8}x^3 + \frac{15}{16}x^4 + o(x^4)$.

(5) (a) 式において $\alpha = -\frac{1}{2}$ とすると, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$. これより,

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} = (1-x)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)\right) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{16}x^3 + \frac{75}{128}x^4 + o(x^4).$$

(6) (b) 式から $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. (d) 式で x を $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ に置き換えて

$$\begin{aligned}\log(\cos x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

(7) (2) を積分して $\quad \mathrm{Sin}^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$

(8) (b) 式の x を x^2+x に置き換えて, $\sin(x^2+x) = (x^2+x) - \frac{(x^2+x)^3}{3!} + o(x^4) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. よって,

$$\int_0^x \sin(t^2+t)dt = \int_0^x \left(t + t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right)dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

(9) $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}$ として (a) 式を用いると

$$\frac{x}{\cos x} = x\left\{1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\right\} = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5).$$

($f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)$ とおき, $x = f(x)\cos x$ に代入して,
$x = \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right)$ を展開して比較することでも求められる).

(10) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ とみる．(9) の式をよく見ると，$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ であることがわかるから，$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ を用いて

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

別解：$f(x) = \tan x$ は奇関数なので，$f'(x)$ は偶関数で，$f'(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)$ と表せる．他方，$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ および (b) 式の x を $2x$ に置き換えて

$$\begin{aligned}1 &= f'(x)\cos^2 x = f'(x)\frac{1+\cos 2x}{2} = \left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)\right)\frac{1+\{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\}}{2}\\ &= \left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = a_0 + (a_2 - a_0)x^2 + \left(a_4 - a_2 + \frac{1}{3}a_0\right)x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

より，$a_0 = 1,\ a_2 = a_0 = 1,\ a_4 = a_2 - \dfrac{1}{3}a_0 = \dfrac{2}{3}$ を得る．つまり，$f'(x) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ を積分して

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

注意：一般に，$\dfrac{d}{dx}o(x^n) = o(x^{n-1})$ は成り立たない．例えば，$f(x) = x^{n+1}\sin\dfrac{1}{x} \in o(x^n)$ だが，$f'(x) = (n+1)x^n\sin\dfrac{1}{x} - x^{n-1}\cos\dfrac{1}{x} \notin o(x^{n-1})$ である．従って，例えば $\tan x$ の漸近展開を求めるのに，$(\log(\cos x))' = -\tan x$ であることから，$\log(\cos x)$ の漸近展開 (6) を微分して求めるという方法は，（現在までの学習内容だけでは）正当化するのが難しい．これらは，後学期の「解析学」の講義で整級数展開を学ぶことで正当化できるようになる．

$\boxed{2}$ (1) $\boxed{1}$(3) を用いて $\sinh^2 x = \left(x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$. よって，

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - x^2}{x^2\sinh^2 x} = \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \to \frac{1}{3}\ (x \to 0).$$

(2) (b) 式から $\sin(x^2) = x^2 - \dfrac{x^6}{6} + o(x^6)$ より，

$$\frac{1}{x^7}\int_0^x \left(\sin(t^2) - t^2\right)dt = \frac{1}{x^7}\int_0^x\left(-\frac{t^6}{6} + o(t^6)\right)dt = \frac{1}{x^7}\left(-\frac{x^7}{42} + o(x^7)\right) \to -\frac{1}{42}\ (x \to 0).$$

$\boxed{3}$ （不定積分に対する積分定数は省略する.）

(1) (i) $e^x = t$ とおくと，$e^x dx = dt$ より，$\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int \frac{t}{t+1}dt = \int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = e^x - \log(e^x+1)$.

(ii) 部分積分法により，$\displaystyle\int x^2\log x dx = \int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x dx = \frac{x^3\log x}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot(\log x)'dx = \frac{x^3\log x}{3} - \int\frac{x^2}{3}dx$ $\displaystyle = \frac{x^3\log x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1)$. (iii) $\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$ より，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\log\frac{|t-1|}{|t+1|} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

(iv) $m \neq n$ のとき，与えられた定積分は，$\displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi$ $= 0$. $m = n$ のとき，$\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 mx dx = \int_0^\pi\frac{1-\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

(v) 与えられた定積分を I とすると，$\displaystyle I = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx$ $= e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - I$ となるので，$I = \dfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right)$.

(vi) $\displaystyle\int_0^\pi\left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = \left[-\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$ $\displaystyle - \left[-\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3\pi}{4}}^\pi = 2\sqrt{2}$.

(vii) $\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$ より，与えられた定積分は $\displaystyle -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\log(1-t^2)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big\{\log(1-t)$ $\displaystyle + \log(1+t)\Big\}dt = \left[(t-1)\log(1-t) + (1+t)\log(1+t) - 2t\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 3\log 3 - 2\log 2 - 2$.

(2) (i) $f'(x) = \dfrac{1}{\log x^3}\cdot 3x^2 - \dfrac{1}{\log x^2}\cdot 2x = \dfrac{x^2 - x}{\log x}$. (ii) $\displaystyle\int_0^x (t-x)\sin t dt = \int_0^x t\sin t dt - x\int_0^x \sin t dt$ より，$\displaystyle g'(x) = x\sin x - \int_0^x \sin t dt - x\sin x = -\int_0^x \sin t dt = [\cos t]_0^x = \cos x - 1$. 因みに，連続関数 h に対して，$\displaystyle h_0(t) = h(t),\ h_k(x) = \int_0^x h_{k-1}(t)\,dt\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ とおくと，$\displaystyle h_n(x) = \int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}h(t)\,dt$ が成り立つ．このコーシーの公式は部分積分法と帰納法で容易に示せる．特に，$g(x) = \sin x - x$ である．