平成28年度 数学演習第一
演習第９回　微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2016 年 7 月 13 日 実施

要点：関数 $f(x)$ の $x=0$ における n 次の漸近展開を求めることとは,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\ (x \to 0) \quad \cdots (*)$$

となる x の多項式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ を求めることである．$f(x)$ の有限マクローリン展開から，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ で求められる．しかし一般に高階導関数を計算するのは煩雑になることが多いため，$x=0$ **における漸近展開を求めるのに** $f^{(n)}(0)$ **を直接計算するのは大変**である．$x=0$ の周りで C^n 級の関数 $f(x)$ に対して，$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ は一意的に定まることに注意すると，**簡単な関数の漸近展開を組み合わせる**ことで，$(*)$ をみたす $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ を一つ見つけてしまえば，それが漸近展開に他ならない．こうして**より複雑な関数の漸近展開を求める**ことができる．

有限マクローリン展開 (定理 2.4.3) を用いることで，次のような簡単な関数を漸近展開できる．つまり，定理 2.4.5(教科書 p.51) を適用すると次のような基本的な漸近展開を得る．

(a) $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$　(α は任意の実数)

ただし $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ を一般二項係数という (教科書 p.151).

特に $\alpha = -1$ とすると $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

(b) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$,　$\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(c) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$

(d) $\log_e(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$

例題　次の関数の $x=0$ における 3 次の漸近展開を求めよ．(1)　$e^x \cos x$　　(2)　$\mathrm{Tan}^{-1} x$

［解］ e^x と $\cos x$ の 3 次までの漸近展開を用いると $e^x \cos x = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2!}x^2\right) + o(x^3) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right) - (1+x)\dfrac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})\ (x \to 0)$，即ち，$f(x) = o(x^n)$ ならば，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = o(x^{n+1})$ という事実も有用である．

$(\mathrm{Tan}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ の 2 次までの漸近展開は，$\dfrac{1}{1+x}$ の 1 次までの漸近展開 $1 - x + o(x)$ を用いて $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ と求められるので，$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ となる．　□

$\boxed{\mathbf{1}}$ **（漸近展開）**

次の関数について $x=0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})\ (x\to 0)$ を用いてよい．

(1) 5^x （4 次）　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （6 次）　(3) $\sinh x$ （4 次）

(4) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ （4 次）　(5) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ （4 次）　(6) $\log(\cos x)$ （6 次）

(7) $\mathrm{Sin}^{-1}x$ （7 次）　(8) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2+t)\,dt$ （4 次）　(9) $\dfrac{x}{\cos x}$ （5 次）

(10) $\tan x$ （5 次）

$\boxed{\mathbf{2}}$ **（漸近展開の応用）**

漸近展開を用いて次の 2 つの極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sinh^2 x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^7}\int_0^x (\sin(t^2)-t^2)\,dt$

$\boxed{\mathbf{3}}$ **（高校程度の積分計算の復習）**

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$　(ii) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$　(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin mx)(\sin nx)\,dx$ （m, n は自然数）

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$　(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x+\cos x|\,dx$　(vii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin x)\log(\sin^2 x)\,dx$

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ．

(i) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\log t}$　　(ii) $\displaystyle g(x)=\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$

【漸近展開の一意性】$x=0$ の周りで定義された関数 $f(x)$ に対して，高々 n 次の x の多項式 $P(x)=\sum_{k=0}^n p_k x^k$, $Q(x)=\sum_{k=0}^n q_k x^k$ があって，$f(x)=P(x)+o(x^n)$, $f(x)=Q(x)+o(x^n)$ $(x\to 0)$ であれば，$P(x)\equiv Q(x)$，つまり，$p_k=q_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ をみたすことを背理法で示しておく．ここで，$d_k=p_k-q_k\ (k=0,1,\cdots,n)$ とおいて，$R(x)=\sum_{k=0}^n d_k x^k = o(x^n)$ $(x\to 0)$ ならば，$d_k=0\ (k=0,1,\cdots,n)$ を示せばよい．そこで，$d_\ell\neq 0$ となる或る $\ell\in\{0,1,\cdots,n\}$ があると仮定して，$m=\min\{\ell\in\{0,1,\cdots,n\}\mid d_\ell\neq 0\}$ を考える．このとき，$R(x)=d_m x^m+o(x^m)\ (x\to 0)$ が成り立つ．実際，$k<m$ のとき，$d_k=0$ より，$R(x)=\sum_{k=m}^n d_k x^k$ と表せるので

$$\frac{R(x)-d_m x^m}{x^m}=\sum_{k=m+1}^n d_k x^{k-m}\to 0\quad (x\to 0)$$

である．一方，$R(x)=o(x^n)$ と $m\leqq n$ から

$$d_m\leftarrow\sum_{k=m}^n d_k x^{k-m}=\frac{R(x)}{x^m}=x^{n-m}\frac{R(x)}{x^n}\to 0\quad (x\to 0)$$

がわかる．よって，$d_m=0$ でなくてはならないが，これは m の定義より $d_m\neq 0$ であることに反する．こうして，$d_k=0\ (k=0,1,\cdots,n)$ が示された．　□