平成28年度 数学演習第一 演習第10回 (7/20 実施) 線形：4次以上の行列式 【解答例】

$\boxed{1}$ $(-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 23.$

$\boxed{2}$ (0) は「やってはいけない」ので省略.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) $2\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 + 2 = 2.$ (2) $(-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 6 + 14 = 2.$ (3) $2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 = 2.$ (4) $2\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 8 = 2.$

(5) $-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 - 2\cdot(-8) = 2.$

$\boxed{3}$ (1) 第2行の -2 倍，-3 倍，-4 倍をそれぞれ第1行，第3行，第4行に加える.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & -16 & -8 & 6 \\ 0 & -31 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & 6 \\ -31 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & 1 & 0 \\ 46 & -4 & 0 \\ -31 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -15 & 1 \\ 46 & -4 \end{vmatrix} = -42.$$

(2) 第1列，第3列から a 倍をくくり出す．第2列を第1列に加えて因数 $1-a$ をくくり出す．第2行を第1行に加えて因数 $1-a$ をくくり出す．これらにより，

$$a^2\begin{vmatrix} 1-a & -a & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & -a & -a \end{vmatrix} = a^2(1-a)^2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -a & -a \end{vmatrix} = a^2(1-a)^2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = a^2(1-a)^2(1+a).$$

(3) 第4行に関して余因子展開すると，第1列に関する行列式の多重線形性が利用できる.

$$(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

(4) 第1行に関して余因子展開すると，A_{11} は対角成分が1の下三角 $n-1$ 次行列であり，A_{1n} は対角成分が (-1) の上三角 $n-1$ 次行列なので，求める行列式は $1+(-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1}=0$.

(5) まず第2行から第 n 行をすべて第1行に加えると，第1行は $(a+n-1)(1,1,\ldots,1)$ になる．そこで $(a+n-1)$ 倍をくくりだしたうえで，第1行を第2行から第 n 行までのすべての行から引く．ここまでの操作は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

である．次に第1行から第n行の並べ方を逆に並べ替える．これにより，$(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ がくくりだされて，下三角行列が得られる．

$$(a+n-1)(-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

よって求める値は，$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

$\boxed{4}$ (1) $\widetilde{A}$ の (i,j)-成分は $(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ であることに注意して計算すれば，$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ となる．(2) A に**例 10.2** の方法を適用すれば，$|A| = -12$ とわかる．あるいは，$A\widetilde{A} = |A|E_n$ の $(1,1)$-成分を比較しているとみれば，$A\widetilde{A}$ を直接計算することでも得られる．(3) $|A| \neq 0$ なので，A は正則で，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$．(4) $A\widetilde{A} = |A|E_n$ において，両辺の行列式を比較すると，左辺は $|A\widetilde{A}| = |A||\widetilde{A}|$．右辺は，$|A|^n$ である．（ここで一般に $|cE_n| = c^n$ であることに注意せよ.）本問では $n=3$ であるから，$|\widetilde{A}| = |A|^2 = 144$．(5) $|\widetilde{A}| \neq 0$ なので，$\widetilde{A}$ は正則である．$A\widetilde{A} = |A|E_n$ から，$\widetilde{A}^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ となる．(6) $A^{-1}\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|E_n$ であることに注意すれば，$\widetilde{A^{-1}} = |A^{-1}|A = \dfrac{1}{|A|}A = -\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{5}$ (1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ なので，2次の場合は高々1で，$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ より $d_2 = 1$．3次の場合は**例 10.2** から $d_3 \leqq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \leqq 3$ である．もし二番目の不等号が等号ならば，全ての成分が1となり，その行列式は0である．よって $d_3 \leqq 2$ がわかる．

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & \cdots & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$ ここで n が偶数のときも二つの行または列を入れ替えることにより行列式の値を $n-1$ にできるので，$d_n \geqq n-1$ が示された．

補足：問題作成者の知る限り，d_n を n の式で表すことは知られていないようである．興味があれば d_4 を計算してみるとよい．$d_4 = 3$ であるが，結構大変である．また，二つの自然数 m, n に対して不等式 $d_{mn} \geqq (d_n)^m \geqq (n-1)^m$ が成り立つことも証明できる（従って $d_n \geqq n-1$ は d_n を知るためには余り役に立たない）.