平成28年度 数学演習第一
演習第10回　線形：４次以上の行列式

2016年7月20日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ **教科書 p.65 の定義 10.1** に従って，次の行列式の値を計算せよ.（**演習書 9.3.6(5) の特殊事例．**）

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式の値を次のそれぞれの方法で求めよ.

(0) **教科書 p.65 の定義 10.1** を適用する.（**絶対にオススメしない!!**）

(1) A に,「1行目を2行目と3行目に加える」という行基本変形を施した行列 A_1 に，
教科書 p.65 の定義 10.1 を適用する.

(2) (1) の A_1 に対して，2行目に関する余因子展開を行う.

(3) (1) の A_1 に対して，3行目に関する余因子展開を行う.

(4) A に,「2列目を3列目，4列目にそれぞれ加える」という列基本変形を施した行列 A_2 に対して，1行目に関する余因子展開を行う.

(5) (4) の A_2 に対して，4列目に関する余因子展開を行う.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の行列の行列式の値を求めよ．但し，(2) は因数分解された形で答えること．また (4),(5) はいずれも n 次正方行列とする.（**演習書 9.3.3(3)** など.）

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の行列や行列式の値を求めよ．

(1) 余因子行列 $\widetilde{A}$

(2) 行列式 $|A|$

(3) 逆行列 A^{-1}

(4) 余因子行列の行列式 $|\widetilde{A}|$

(5) 余因子行列の逆行列 $(\widetilde{A})^{-1}$

(6) 逆行列の余因子行列 $\widetilde{A^{-1}}$

（ヒント：(3)〜(6) は闇雲に成分を計算するのではなく，どんな n 次行列 M に対しても，$M\widetilde{M} = |M|E_n$ が成り立つことに注意して求めることが望ましい.）

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 以上の自然数 n に対して，

$$d_n = \max\{|A| \mid A \text{ は } n \text{ 次正方行列で，成分はすべて } 0 \text{ または } 1\}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $d_2 = 1,\ d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ であることを示せ．

(2) n 次正方行列 $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の行列式 $|A_n|$ の値を計算し，不等式 $d_n \geqq n-1$ が成り立つことを示せ．