数学演習第一 (第 11 回)　微積 : 積分の計算　《解答例》

2016 年 7 月 27 日 実施分

$\boxed{1}$ (1)〜(4) は基本公式として, 計算方法とともに結果も覚えておこう.

(1) $x = a\tan\theta \left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く. $\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{a^2}$, $dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$ より, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}$.

(2) 被積分関数を部分分数分解して, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

(3) $\sqrt{x^2+A} = t - x$ と置くと, 両辺を 2 乗することで x^2 が消せて, $x = \dfrac{t^2-A}{2t}$ $\left(= \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{A}{t}\right)\right)$ となる. $dx = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{A}{t^2}\right)dt = \dfrac{t^2+A}{2t^2}\,dt$ だから, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2-A}{2t}}\,\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right|$.

(4) $x = a\sin\theta \left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{a\cos\theta}$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$ より, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int d\theta = \theta = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}$.

(5)〜(8) では「見えない 1」とのペアで部分積分する方法が有効.

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$. 最後の項で (分子の次数) $\geq$ (分母の次数) なので, 次のように割り算する: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \dfrac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \dfrac{A}{\sqrt{x^2+A}}$. 代入して移項すると, $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)$. 最後で (3) の結果を用いた.

(6) (5) と同じ計算手順で, $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right)$.

(7) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int x\,(\mathrm{Sin}^{-1}x)'\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 右辺の被積分関数の分子 x が $(1-x^2)'$ の定数倍であることに注意する. $\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$.

(8) $\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \int\frac{x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

$\boxed{2}$ (1) 部分分数分解によって, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x-4} = \int\frac{dx}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-1}{x+4}\right|$.

(2) $\boxed{1}$ (2), (1) を使って, $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+4)(x^2-4)} = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x^2-2^2} - \frac{1}{x^2+2^2}\right)dx = \frac{1}{32}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{16}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}$.

(3) 被積分関数が (分子の次数) $\geq$ (分母の次数) と頭でっかちなので, $\dfrac{x^2+3}{x^2+4} = \dfrac{x^2+4-1}{x^2+4} = 1 - \dfrac{1}{x^2+4}$ と割り算してから積分する. ここでも $\boxed{1}$ (1) が使えて, $\displaystyle\int\frac{x^2+3}{x^2+4}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+2^2}\right)dx = x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}$.

(4) やはり, $\dfrac{2x^3+5x}{x^2+2} = \dfrac{2x(x^2+2)+x}{x^2+2} = 2x + \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2}$ と割り算する. (分子の次数) $+ 1 =$ (分母の次数) の場合, 分母の導関数を分子に作るように変形する. $\displaystyle\int\frac{2x^3+5x}{x^2+2}\,dx = \int\left\{2x + \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right\}dx = x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+2)$.

(5) 被積分関数の分母は $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ と因数分解でき, $\dfrac{x^2+1}{x^4+1} = \dfrac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \dfrac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right)$. ここで, それぞれの分母を $x^2\pm\sqrt{2}x+1 = \left(x\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$ と平方完成すると, $\boxed{1}$ (1) が使えて, $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \int\frac{dx}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,x+1) + \mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}\,x-1)\right\}$. この場合, 置換 $t = x\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は (頭の中で行い) 書かなくてよい.

(6) $\dfrac{1}{x^3-8} = \dfrac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{bx+c}{x^2+2x+4}$ となるような定数 a, b, c を求める (x^2+2x+4 の分子は定数ではなく 1 次式). 両辺に $(x-2)(x^2+2x+4)$ をかけて整理すると, $1 = (a+b)x^2 + (2a-2b+c)x + 4a - 2c$. 係数比較で, $a+b=0$, $2a-2b+c=0$, $4a-2c=1$ を解いて $a = \dfrac{1}{12}$, $b = -\dfrac{1}{12}$, $c = -\dfrac{1}{3}$ と求まる. よって, $\dfrac{1}{x^3-8} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+4}{x^2+2x+4}\right)$. 右辺第 2 項は (分子の次数)+1 = (分母の次数) だから, 分子に分母の導関数

$(x^2+2x+4)'=2x+2$ を作るように変形する: $\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(2x+2)+6}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4}+\dfrac{3}{(x+1)^2+3}$.
よって, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{12}\log|x-2|-\frac{1}{24}\log(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{3}$ 置換積分の問題. 積分変数を巧く置きかえることによって, $\boxed{2}$ のような有理関数の積分に帰着される.

(1) $t=\sqrt{x}$ とおけば $dx=2t\,dt$ より, $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t}{1+t}dt=2\int\Big(1-\frac{1}{t+1}\Big)dt=2(t-\log|t+1|)=2(\sqrt{x}-\log(\sqrt{x}+1))$.

(2) $t=\sqrt{1-x}$ とおくと, $x=1-t^2$ であって $dx=-2t\,dt$. よって, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}}=\int\frac{-2t\,dt}{(1-t^2)^2t}=-2\int\Big\{\frac{1}{(t-1)(t+1)}\Big\}^2dt=-2\int\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)\Big\}^2dt=-\frac{1}{2}\int\Big\{\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2-1}\Big\}dt=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\log\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\right)=\frac{t}{t^2-1}+\frac{1}{2}\log\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|=-\frac{\sqrt{1-x}}{x}+\frac{1}{2}\log\Big|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\Big|$.

(3) $\sqrt{x^2+3x-1}=t-x$ と置くと, 両辺を 2 乗したときに x^2 の項が消えて, $x=\dfrac{t^2+1}{2t+3}$ と表せる. このとき, $dx=\dfrac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2}dt$ となるから, $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-1}}=\int\frac{2t+3}{t^2+1}\frac{1}{t-\frac{t^2+1}{2t+3}}\frac{2(t^2+3t-1)}{(2t+3)^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\,\mathrm{Tan}^{-1}t=2\,\mathrm{Tan}^{-1}(x+\sqrt{x^2+3x-1})$. 【追記】$t=\frac{1}{x}$ の置換でもできる (置換の仕方で定数のズレが生じうる).

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\int\cos^4x\,dx=\int\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^2dx=\frac{1}{4}\int\Big(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\Big)dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ での置換は基本的. このとき, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ は (計算で確認した後に) 覚えておこう. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\Big)$.

(3) 被積分関数が $\cos^2x$, $\sin^2x$ (および $\tan x$) の式の場合は, $t=\tan x$ の置換が有効. このとき, $\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ と計算できるから, $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2x+4\sin^4x}=\int\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{4t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}(2t)=\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}(2\tan x)$.

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\Big[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-1}{2}\Big]_1^2=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Sin}^{-1}x)(\mathrm{Sin}^{-1}x)'dx=\Big[\frac{1}{2}(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^2=\frac{\pi^2}{72}$.

(3) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}dx=\Big[x\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}\Big]_0^{2\sqrt{3}}-\int_0^{2\sqrt{3}}x\Big(\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}\Big)'dx=2\sqrt{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x}{2\{(\frac{x}{2})^2+1\}}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\Big[\log(x^2+4)\Big]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-2\log 2$.

(4) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ で, 積分区間の対応は $\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$ となる. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_0^1\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{6}$ 曲線の長さについては微積 p.76 参照 (定理 3.4.3, 3.4.4). $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\log\Big|\tan\frac{x}{2}\Big|$ であることに注意 (微積 p.64).

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\Big[\log\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log 3$.

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2t+4\Big(\frac{\cos t}{\sin t}\Big)^2}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^4t+4(1-\sin^2t)}{\sin^2t}}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2-\sin^2t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{2}{\sin t}-\sin t\Big)dt=\Big[2\log\Big(\tan\frac{t}{2}\Big)+\cos t\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 3-\frac{1}{2}$.