数学演習第一・中間統一試験【解説】

2016 年 6 月 22 日実施

1

(1) $\sin\theta = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Big)$ を用いて, $\sin\dfrac{8\pi}{7} = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{8\pi}{7}\Big) = \cos\Big(-\dfrac{9\pi}{14}\Big) = \cos\dfrac{9\pi}{14}$. $0 \leq \dfrac{9\pi}{14} \leq \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により, $\mathrm{Cos}^{-1}\Big(\sin\dfrac{8\pi}{7}\Big) = \mathrm{Cos}^{-1}\Big(\cos\dfrac{9\pi}{14}\Big) = \boxed{\dfrac{9\pi}{14}}$.

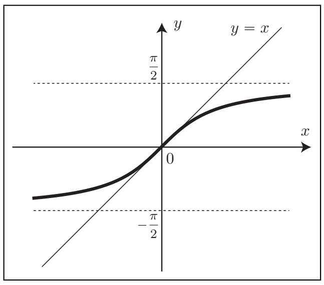
(2) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}3$ とおけば $\tan\alpha = 3$ $\Big(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\Big)$. このとき, $\mathrm{Sin}^{-1}x = \dfrac{\pi}{4} - \alpha \in \Big(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big)$ となるので,

$$x = \sin\Big(\frac{\pi}{4}-\alpha\Big) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\tan\alpha)\cos\alpha.$$

ここで, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 10$ であるから, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. よって,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-3}{\sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{20}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \Big(= -\frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

【注】 通常の状況では, $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}3$ の範囲は $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とすればよく, $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の範囲を吟味することも省略される. この問題はそのように扱っても正しく解けるように作られている. しかし, もう少し注意深い考察が必要となる場合がある. 例えば, 方程式 $\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Tan}^{-1}3 = -\frac{\pi}{4}$ を考えてみよう. これを上のように形式的に計算すれば $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ が得られが, 実は解は存在しない. 実際, $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}3$ は $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲にあるので, $\mathrm{Sin}^{-1}x = -\frac{\pi}{4} - \alpha \in \big(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\big)$ となってしまい, $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域をはみ出してしまう.



(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフは $y = \tan x$ $\Big(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\Big)$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である. $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ の値域は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ のグラフは, 原点において傾き 1 の接線を持ち (従って $y = x$ が接線), 直線 $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ が $x \to \pm\infty$ における漸近線となる (複号同順).

2

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)-\log(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{\log(1-x)}{-x} - \frac{\log(1+x)}{x}\right\} = \boxed{-1}$.

(5) まず, 対数をとって極限値を計算する. ロピタルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(2^x+3^x)-\log 2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2^x+3^x}\cdot(2^x\log 2 + 3^x\log 3)}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x\log 2 + \log 3}{(\frac{2}{3})^x + 1} = \log 3.\end{aligned}$$

よって, 指数関数 e^x の連続性により,

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}e^{\log(\frac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty}\log(\frac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{x}}} = e^{\log 3} = \boxed{3}.$$

【注】 $e^{\log 3}$ は計算途中なので不正解とした.

【別法】 $\Big(\dfrac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = \left\{3^x\cdot\dfrac{(\frac{2}{3})^x+1}{2}\right\}^{\frac{1}{x}} = 3\left\{\dfrac{(\frac{2}{3})^x+1}{2}\right\}^{\frac{1}{x}}$ において, $0 < \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^x < 1$ $(x > 0)$ より,

$1 \geq \left\{\dfrac{(\frac{2}{3})^x+1}{2}\right\}^{\frac{1}{x}} \geq \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} \to 1$ $(x \to \infty)$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = 3\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(\frac{2}{3})^x+1}{2}\right\}^{\frac{1}{x}} = 3$.

(6) ロピタルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x - \mathrm{Tan}^{-1}x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}\\ &= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{2}{(1+x^2)^2}\right\} = \boxed{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

3 (7) $f(x)=x^{\log x}$ とおけば, $\log f(x)=\log(x^{\log x})=(\log x)^2$. 両辺を x で微分して, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2\log x}{x}$. よって,

$f'(x)=\dfrac{2\log x}{x}\cdot x^{\log x}=\boxed{2x^{\log x-1}\log x}$.

【別法】 $f(x)=(e^{\log x})^{\log x}=e^{(\log x)^2}$ より, $f'(x)=e^{(\log x)^2}\cdot\dfrac{2\log x}{x}=x^{\log x}\cdot\dfrac{2\log x}{x}=2x^{\log x-1}\log x$.

【注】 解答は上の形が最も適切であるが, $2e^{\log\frac{x}{e}}\log x$ や $e^{\log x-1}\log x^2$ も正解とした.

(8) $g(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$ とおけば, $\log|g(x)|=3\log|x-1|-2\log|x|-\log|x+1|$. 両辺を x で微分して,

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)}.$$

$$\therefore\ g'(x)=\frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}=\boxed{\frac{2(2x+1)(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}}.$$

対数微分法の代わりに商の微分公式を用いて,

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{3(x-1)^2\cdot x^2(x+1)-(x-1)^3\cdot(3x^2+2x)}{x^4(x+1)^2}\quad\text{(約分に注意)}\\ &=\frac{\{3x(x+1)-(x-1)(3x+2)\}(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}=\frac{(4x+2)(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}. \end{aligned}$$

あるいは, $g(x)=(x-1)^3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x+1}$ に積の微分公式を適用してもよい.

(9) $(\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{x})'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\boxed{-\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}$.

(10) $g'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{\frac{d}{dx}\cosh x}=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}}$. ここで, 後ろから 2 番目の等号では, $\sinh x=\sqrt{\cosh^2 x-1}\ (x>0)$ であることを用いている.

4 (11) 直線 AB は点 $\mathrm{A}(1,0,-1)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}={}^t(-3,1,1)$ を方向ベクトルとする直線であるから, その方程式は

$$\boxed{\begin{cases}x=-3t+1\\ y=t\\ z=t-1\end{cases}}\quad\text{あるいは}\quad\boxed{\frac{x-1}{-3}=y=z+1}.$$

【注】 通る点として $\mathrm{B}(-2,1,0)$ を選べば, 方程式は $\dfrac{x+2}{-3}=y-1=z$ とも書かれる.

(12) 平面 α は点 $\mathrm{A}(1,0,-1)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}={}^t(5,-4,2)$ を法線ベクトルとする平面であるから, その方程式は $5(x-1)-4y+2(z+1)=0$, 整理して $5x-4y+2z-3=0$. よって, 原点 O と平面 α との距離は, 公式を用いて $\dfrac{|-3|}{\sqrt{5^2+(-4)^2+2^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{45}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}\ \left(=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5 (13) $(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-3&-2\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}3&2\\-2&-3\end{bmatrix}}$.

(14) A に行基本変形を施して, $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{②+2\times①}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{①-②}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=D$. よって, A の簡約化 $D=PA$ は単位行列であって, $P=P_{12}(-1)P_{21}(2)=\boxed{\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}}$.

【注】 $P_{12}(-1)P_{21}(2)$ と答えてもよい.

(15) 求める行列を $M = \begin{bmatrix} 0 & s \\ t & u \end{bmatrix}$ とおけば,

$$\begin{aligned} O = BM - MB &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s \\ t & u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2t & -s-2u \\ t & s+u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & s \\ -t+u & -2t+u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-2t & -2s-2u \\ 2t-u & s+2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $s = -2t$, $u = 2t$. よって, このような $M \neq O$ を 1 つ挙げれば, $M = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$ $(t = 1)$. すべてを挙げれば, $M = \begin{bmatrix} 0 & -2t \\ t & 2t \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$.

【別法】 B 自身と E (単位行列) は B と可換だから, $sB + tE$ の $(1,1)$ 成分が 0 となるように $(s,t) \neq (0,0)$ を調整してやれば望みの行列が得られる. (実は, B と可換な行列は $sB + tE$ の形の行列で尽くされる.)

(16) $$C\,{}^{\mathrm{t}}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{④-①\\③-②}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{①-3\times③\\②+5\times③}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\times③]{\substack{\frac{1}{2}\times①\\(-\frac{1}{3})\times②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より, 階数は $\boxed{2}$.

【別法】 $$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②+2\times①\\③+①\\④-①}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{①-②\\③+②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より (演習第 4 回解答例 $\boxed{5}$【注】参照),

$$C\,{}^{\mathrm{t}}C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6

(17) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化する:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & -4 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & -3 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-2\times①\\③-3\times①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{①-2\times②\\③+2\times②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{①-③\\②+③}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}.$$

(18) (17) の結果より, 解くべき連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\;\; 3x_3 \quad = -1 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad = \;\;4 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = \;\;3 \end{cases}$. よって, 主成分に関係しない変数 x_3 を任意定数として $x_3 = s$ とおき,

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -1 - 3s \\ x_2 = 4 + 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = 3 \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

(19) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列に行基本変形を施す:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②+①\\③+2\times①}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & a+3 & 4 \\ 0 & a & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)\times①\\\frac{1}{2}\times①}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{a+3}{2} & 2 \\ 0 & a & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-a\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{a+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{(a-2)(a+5)}{2} & -2(a-2) \end{bmatrix}.$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式が無数の解をもつのは $a = \boxed{2}$ のときのみ.

(20) $a=2$ のとき, 上の計算に従って拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, 解くべき方程式は } \begin{cases} x \quad\quad - \ 3z = -3 \\ \quad\ y + \frac{5}{2}z = \ \ 2 \end{cases}.$$

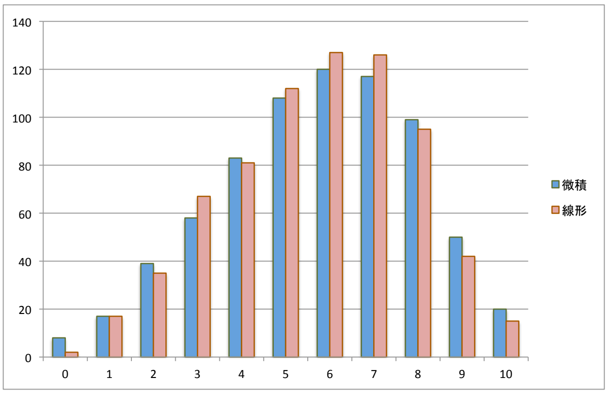
よって, 主成分に関係しない変数 z を任意定数として $z=2s$ とおき, 求める解は

$$\boxed{\begin{cases} x = -3+6s \\ y = 2-5s \\ z = 2s \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

ここでは, 分数が現れないように $z=2s$ とおいたが, 勿論 $z=s$ とおいて解を表してもよい.

以下の得点分布は 1 年生のみの集計です.

微積・線形の得点分布 (平均: 微積 5.73, 線形 5.71)



合計の得点分布 (平均: 11.44)