

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2016年6月22日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみ記入せよ —

1 逆三角関数について次の問いに答えよ.

- (1) $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right)$ の値を求めよ. (2) 方程式 $\text{Sin}^{-1} x + \text{Tan}^{-1} 3 = \frac{\pi}{4}$ を解け.
(3) 関数 $y = \text{Tan}^{-1} x$ のグラフを ($y = x$ のグラフとの位置関係に注意して) 解答欄に描け. ただし, 値域が分かるように座標軸に必要な数値を書き入れよ.

2 次の極限值を求めよ.

- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sin}^{-1} x - \text{Tan}^{-1} x}{x^3}$

3 次の関数 (括弧内が定義域) の導関数を 整理された形で 求めよ. ((10) は問題の指示に従え)

- (7) $x^{\log x}$ ($x > 0$) (8) $\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$ ($x \neq 0, -1$) (9) $\text{Cos}^{-1} \sqrt{x}$ ($0 < x < 1$)
(10) $y = \cosh x \left(= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$ ($x > 0$) の逆関数を $x = g(y)$ と表すとき, その導関数 $g'(y)$ を求めよ. (必要なら $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を用いてよい.)

4 座標空間の3点 $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(3, -3, 2)$ に対して次の問いに答えよ.

- (11) 直線 AB (すなわち2点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ.
(12) 点 A を通り, 直線 BC と直交する平面を α とするとき, 原点 O と平面 α との距離を求めよ.

5 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ および $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (13) $(A+B)(A-B)$ を計算せよ.
(14) A の簡約行列 D に対して $PA = D$ を満たす行列 P をいくつかの基本行列の積の形で表せ.
(15) B と可換な行列のうちで, $(1, 1)$ 成分が0で, 零行列とは異なるものを1つ挙げよ.
(16) $C^t C$ の階数を求めよ. 【注】 B, M が可換とは $BM = MB$ であること. $^t C$ は C の転置行列を表す.

6 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含むならば, 任意定数のおき方は標準的な方法, すなわち線形の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は s, t, \dots をこの順に用いよ.

- (17)
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$
 の拡大係数行列に対する簡約行列を求めよ.

(18) この連立1次方程式を解け.

- (19)
$$\begin{cases} -x + 3z = 3 \\ x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay - z = -2 \end{cases}$$
 (a は定数) が無数の解をもつような a の値を求めよ.

(20) (19) で求めた a の値に対して, この連立1次方程式を解け.