平成28年度 数学演習第一・期末統一試験【解説】

1 (1), (2) は，与えられた正方行列 A と単位行列 E を結合させた行列 $[A\ \ E]$ の簡約行列 $[E\ \ A^{-1}]$ を求めればよいだけなので，説明するまでもないだろう．

2 (3) 求める三角形の面積は $\dfrac{1}{2}|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]| = \dfrac{|2\cdot 3-4\cdot 5|}{2} = \boxed{7}$

(4) 求める三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\| = \dfrac{\|{}^t[3\ \ 6\ \ 6]\|}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{1+2^2+2^2} = \boxed{\dfrac{9}{2}}$

3 (5) $\begin{vmatrix}2&1&3\\6&5&4\\7&9&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&1&1\\6&5&-2\\7&9&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&1\\10&7&-2\\5&8&1\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}2&7\\1&8\end{vmatrix} = \boxed{45}$

(6) $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&3&3&3\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}$
$= \boxed{-3}$

4 (7) $\widetilde{A} = [\widetilde{a}_{ij}]$ と表すと，$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{j+i}|A_{ji}|$ であった．特に行列 $A = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ については，零ベクトルを含むことから，$\widetilde{a}_{23} = \widetilde{a}_{32} = \widetilde{a}_{33} = 0$ を得る．$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} = -3$, $\widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix}0&1\\5&6\end{vmatrix} = 5$, $\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix}0&3\\4&6\end{vmatrix} = 12$, $\widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix}0&2\\4&5\end{vmatrix} = -8$, $\widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix}0&1\\4&6\end{vmatrix} = -4$, $\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix} = -2$

(8) $|A| = -1\cdot 2\cdot 4 = -8$ より，$A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{|A|} = -\dfrac{1}{8}\widetilde{A}$

(9) (7) から，$\left|\widetilde{A}\right| = -(-2)(-4)(-8) = \boxed{64}$

(別法) $A\widetilde{A} = |A|E_3$ より，$\left|\widetilde{A}\right| = |A|^2 = \boxed{64}$

(10) $\widetilde{A^{-1}} = \left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ から，$\left|\widetilde{A^{-1}}\right| = \dfrac{1}{\left|\widetilde{A}\right|} = \boxed{\dfrac{1}{64}}$

【参考】同じサイズの任意の正方行列 A, B について　$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\,\widetilde{A},\ \ \widetilde{E} = E$

5 (11) $y^{(n)} = \{3(3x+1)^{-1}\}^{(n-1)} = \boxed{\dfrac{(-1)^{n-1}\,3^n\cdot(n-1)!}{(3x+1)^n}}$

或いは，$y^{(n)} = \left\{\left(x+\frac{1}{3}\right)^{-1}\right\}^{(n-1)} = \boxed{\dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^n}}$

(12) $(x^2)^{(k)} = 0\ (k \geqq 3)$ なので，ライプニッツ (Leibniz) の公式により，$n \geqq 2$ のとき
$y^{(n)} = \binom{n}{0}x^2(e^{-x})^{(n)} + \binom{n}{1}2x(e^{-x})^{(n-1)} + \binom{n}{2}\cdot 2(e^{-x})^{(n-2)} = \boxed{(-1)^n\left\{x^2-2nx+n(n-1)\right\}e^{-x}}$
また，$n=1$ の場合も上式は正しい．

6 (13) $f(x) = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}x^2 + \binom{1/2}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ と漸近展開の一意性から，$f^{(4)}(0) = -\dfrac{4!}{8} = \boxed{-3}$

(別法) $x = \sqrt{x^2+1}f'$ の両辺をそれぞれ x で微分して，微分方程式 $(*)$
$f = \sqrt{x^2+1} = xf' + (x^2+1)f''$ を得る．特に $f''(0) = 1$ がわかる．そして，$(*)$ の両辺をそれぞれ x で 2 回微分して，微分方程式 $(x^2+1)f^{(4)} + 5xf''' + 3f'' = 0$ が得られる．特に $f^{(4)}(0) = -3f''(0) = \boxed{-3}$ を知る．

【注意】$f'(0) = 0$ なので，$(x^2+1)(f')^2 = x^2$ から同様にしても，$f^{(4)}(0)$ の値は求められない．
勿論，$f^{(4)}(x)$ を直接計算することは全くお勧めしない．

7

(14) $g(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(-x/2)}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{8}+o(x^3)\right\}=\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)}$

(15) $g(x)=\left\{x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right\}\left\{2x-2x^2+o(x^2)\right\}=\boxed{2x^2-2x^3+o(x^3)}$

(16) $g(-x)=g(x)$ より，$g(x)=a_0+a_2x^2+o(x^3)$ と表せるので，

$2=(e^x+e^{-x})g(x)=\left\{2+x^2+o(x^3)\right\}\left\{a_0+a_2x^2+o(x^3)\right\}=2a_0+(a_0+2a_2)x^2+o(x^3)$

と漸近展開の一意性から，$a_0=1,\ a_2=-\dfrac{a_0}{2}=-\dfrac{1}{2}$ を得る．つまり，$g(x)=\boxed{1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)}$

(別法) $g(x)=\dfrac{1}{1-(1-\cosh x)}$ と見て，$\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ を用いると，

$g(x)=1+(1-\cosh x)+o(x^3)=\boxed{1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)}$ でもよい．

8

(17) $x=\sin y\ (0<|y|<\pi/2)$ とおいて，$\dfrac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{\tan x-x}=\dfrac{\sin y-y}{\tan(\sin y)-\sin y}$ を考えると，

$\sin y=y-\dfrac{y^3}{6}+o(y^3),\ \tan z=z+\dfrac{1}{3}z^3+o(z^3)$ から

$$\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{\tan x-x}=\frac{\sin y-y}{\tan(\sin y)-\sin y}=\frac{-\dfrac{y^3}{6}+o(y^3)}{\left(y-\dfrac{y^3}{6}\right)+\dfrac{1}{3}y^3-\left(y-\dfrac{y^3}{6}\right)+o(y^3)}$$

$=\dfrac{-1+\dfrac{o(y^3)}{y^3}}{2+\dfrac{o(y^3)}{y^3}}\to\boxed{-\dfrac{1}{2}}\quad(x\to 0)$ 　こうすると，$\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ を求めなくて済む．

(別法) $\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3),\ \tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ より

$$\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{\tan x-x}=\frac{-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}\to\boxed{-\frac{1}{2}}\quad(x\to 0)$$

9

(18) $\dfrac{x}{x^2+4}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+4)'}{x^2+4},\ \displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x/2)}{(x/2)^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}$ より

$\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+4}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}\log(x^2+4)-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}}$

(19) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと，$x=t^2-1,\ dx=2t\,dt$ より

$\displaystyle\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx=2+\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2+\left[\log\frac{t-1}{t+1}\right]_2^3=\boxed{2+\log\frac{3}{2}}$

(20) $\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}$ および $-\log\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

$=2\log(\sqrt{3}-1)$ から

$\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\,dx=\left[\tan x-\frac{1}{\cos x}-\log(1+\sin x)\right]_0^{\pi/3}=\boxed{\sqrt{3}-1+2\log(\sqrt{3}-1)}$

(別法) $u=\tan(x/2)$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\dfrac{2u}{1+u^2},\ dx=\dfrac{2}{1+u^2}\,du$ より

$$\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\,dx=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{4u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}\,du=\int_0^{1/\sqrt{3}}\left\{\frac{2}{(u+1)^2}-\frac{2}{u+1}+\frac{(u^2+1)'}{u^2+1}\right\}du$$

$$=\left[-\frac{2}{u+1}+\log\frac{u^2+1}{(u+1)^2}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=\sqrt{3}-3+\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^2+2$$

$$=\boxed{\sqrt{3}-1+2\log(\sqrt{3}-1)}$$