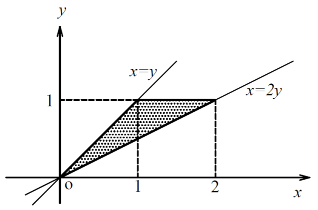
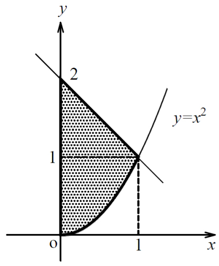
数学演習第二（第 10 回）微積：重積分 [1] (定義，累次積分)　解答例　2016 年 12 月 21 日実施

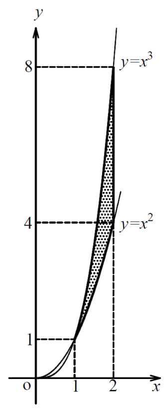
$\boxed{\text{重要}}$ 重積分を計算する際は積分領域を正しく把握することが重要. 紙面の都合上, 一部の問題の積分領域しか載せないが, 重積分の問題を解くときには, まずは積分領域を描こう.



$\boxed{1}$ (1)



$\boxed{2}$ (1)



$\boxed{2}$ (5)

$\boxed{1}$ (1) 領域 D は 3 直線 $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=1$ で囲まれた三角形.

(i) $D: 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2y$ とみなす.

$$\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2y\,dx = \int_0^1 y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3}y^4 dy = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

(ii) $y=1$ を境に左右に分ける. $D_1: 0 \leqq x \leqq 1,\ \frac{1}{2}x \leqq y \leqq x$ と $D_2: 1 \leqq x \leqq 2,\ \frac{1}{2}x \leqq y \leqq 1$

$$\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} x^2y\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{1} x^2y\,dy = \int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5\right]_1^2 = \frac{7}{15}.$$

(2) $$\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4} dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

ここで, $\displaystyle\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy$ は, 半径 x の円の 1/4 の面積を表すことから値が $\dfrac{\pi x^2}{4}$ となることを利用した.

(3) 領域 D は, $0 \leqq x \leqq a$, $-\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$ と表せる (原点が中心で半径 a の円の右半分).

$$\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dxdy = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy = \int_0^a 2\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{2}{3}x(a^2-x^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{6}x^4\right]_0^a = \frac{a^4}{6}.$$

(6) 領域 D は, 中心が $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円板であり, $0 \leqq x \leqq 1$, $-\sqrt{x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x-x^2}$ と表せる.

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x-x^2} = \int_0^1 2x\sqrt{1-x}dx$$

$$= \int_1^0 2(1-t^2)t\cdot(-2t)dt = 4\int_0^1 (t^2-t^4)dt = \frac{8}{15}. \qquad (t=\sqrt{1-x} \text{ で置換した})$$

【注】 (2), (3), (6) は累次積分の順序を変えてもできるが, 計算量は増える (Web 頁で H24 の解答参照)

$\boxed{2}$ (1) 積分領域は $D_1: 0 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq 2-x$ である. このとき $0 \leqq y \leqq 2$ であり, $0 \leqq y \leqq 1$ のとき $0 \leqq x \leqq \sqrt{y}$, $1 \leqq y \leqq 2$ のとき $0 \leqq x \leqq 2-y$ となる. 従って,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

(5) 積分領域は $D_2: 1 \leqq x \leqq 2$, $x^2 \leqq y \leqq x^3$ である. このとき $1 \leqq y \leqq 8$ であり, $1 \leqq y \leqq 4$ のとき $\sqrt[3]{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$, $4 \leqq y \leqq 8$ のとき $\sqrt[3]{y} \leqq x \leqq 2$ となる. 従って,

$$\int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)dy = \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_1^4 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_4^8 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)dx.$$

$\boxed{3}$ (1) x についての原始関数を計算することは困難であるが, y については容易に原始関数が求まる.

$$\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx = \frac{3}{8}.$$

積分順序を交換してこの重積分を計算することはかなり難しい.

(2) 積分領域は $0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1$ であるが, $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ とも表すことができる. 被積分関数は e^{-x^2} であり, x についての原始関数は初等関数では表せない. そこで累次積分の順序を入れ換えて

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

実は, 順序交換しなくても, 部分積分を用いて,

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx = \left[y\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right]_0^1 + \int_0^1 ye^{-y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

$\boxed{4}$

(1)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$0 \leqq t \leqq 1$	$\lvert y\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq y^2$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3$
平面 $y=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$0 \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq t^2$	$t^2\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$0 \leqq t \leqq 1$	$x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ \sqrt{t} \leqq \lvert y\rvert$	$\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}$

$$V_1 = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 dt = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\frac{3\cdot 1\cdot \pi}{4\cdot 2\cdot 2} = \frac{\pi}{8}.$$

$$V_1 = \int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

(2)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$\lvert y\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ y^2+z^2 \leqq 1$	$2\,\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert + 2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$\lvert x\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ x^2+z^2 \leqq 1$	$2\,\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert + 2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1 \leqq t \leqq 1$	$\lvert x\rvert \leqq \sqrt{1-t^2},\ \lvert y\rvert \leqq \sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$V_2 = \int_{-1}^1 4(1-t^2)\,dt = 4\cdot 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = 8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{16}{3}.$$