

数学演習第二 (第 10 回) 微積 : 重積分 [1] (定義, 累次積分)

2016 年 12 月 21 日

1 (演習書: 問題 6.1.2 (1) 改題,(2),(3),(6)) 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_D x^2 y \, dx dy \quad D : y \leq x \leq 2y, y \leq 1$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} \, dx dy \quad D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

$$(3) \iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0 \quad (a \text{ は正の定数})$$

$$(6) \iint_D \sqrt{x} \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq x.$$

2 (演習書: 問題 6.1.3 (1),(5)) 次の累次積分の順序を入れ替えよ.

$$(1) \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy \quad (5) \int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy$$

3 (演習書: 問題 6.1.4 (1) 改題,(3)) 次の 2 重積分, 累次積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) \, dx dy \quad D : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} \, dx$$

4 次の空間図形の体積を求めよ.

$$(1) V_1 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y^2 \quad (2) V_2 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$$

[手順]

(a) それぞれの立体を, 平面  $x = t$  で切った断面図を  $yz$ -平面に描く.  
さらに, 断面図が空集合にならない  $t$  の範囲も求める.

(b) 同様に, 平面  $y = t$  で切った断面図を  $xz$ -平面に, 平面  $z = t$  で切った断面図を  $xy$ -平面に描く,  
(断面図が空集合にならない  $t$  の範囲も求める)

(c) (a), (b) の 3 方向の断面のうち簡単なものに注目し, 体積が断面積の積分であることを利用して求める.