数学演習第二 演習 第１１回 線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標　解答例

２０１７年1月１１日 実施

ここでは, 基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の成分を並べて得られる行列を $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ のように表す.

$\boxed{1}$ それぞれの前半は第９回にやっているので，前半は省略し，後半のみ書く.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ より，表現行列は $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

注：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{3}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ から, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{3}{5}f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - \dfrac{2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\dfrac{2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \dfrac{3}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ から, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -\dfrac{2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \dfrac{3}{5}f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = -\dfrac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{3}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

であり，これらを並べた行列 $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ が f の標準基底に関する表現行列.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ より，表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を並べた行列 $[A, B]$ を行基本変形して階段行列にする：

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & -3 & -13 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 13 \end{bmatrix} =: [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3,\ \boldsymbol{c}_4, \boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6]$$

・$\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ が 1 次独立なので $\mathcal{A}$ も 1 次独立であり, $\mathbb{R}^3$ の基底になる.

(1) $\boldsymbol{c}_4 = 2\boldsymbol{c}_1 + 9\boldsymbol{c}_2 + 8\boldsymbol{c}_3$ から $\boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 8\boldsymbol{a}_3$ がわかり,

$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$.　同様に $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$.

(2) $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ とおき, B も同様とする. $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底の取り替え行列 P は $AP = B$ をみたすので, $P = A^{-1}B = [\boldsymbol{c}_4, \boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6]$ である．逆向きの変換には逆行列が対応する：$Q = P^{-1}$.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 15 \\ 8 & 3 & 13 \end{bmatrix}, \quad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & 9 & -15 \\ 3 & 2 & -3 \\ -13 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{v} = B\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3 = AP\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ より，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 64 \\ 53 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を並べた行列を行基本変形して階段行列にすると

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: [\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3, \boldsymbol{d}_4, \boldsymbol{d}_5] = D$$

(1) D から $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ が読み取れて $W\subset\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$ と $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ がわかる． 次に，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ の式から $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_2=-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ が得られて $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle\subset\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle\subset W$ が確かめられる．従って $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=W$.
また, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は明らかに 1 次独立なので, $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は W の基底となる.
(2) $P=[[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}},[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}]=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ である．$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]P=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$ から計算してもよい.
(3) (2) と同様に $Q=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$.
(4) $[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]Q=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]P^{-1}Q$ より $R=P^{-1}Q=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}$.

$\boxed{4}$ (1) 表現行列の定義から $[f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)]=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3]B$ ，$B=[[f(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{G}},[f(\boldsymbol{v}_2)]_{\mathcal{G}}]$ と求められる．行列 A,F,G からも求められる．実際，$f(\boldsymbol{v}_j)=A\boldsymbol{v}_j$ $(j=1,2)$ より $[f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)]=AF$ であり，$[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3]B=GB$ なので，3×2 行列 X に関する方程式 $AF=GX$ の解 X が求める B．そこで，G の正則性により，$B=X=G^{-1}AF$ として計算すると

$$B=X=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\3&5\\5&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

注：方程式 $GX=AF$ の拡大係数行列 $[G,AF]$ の階段行列を求める方法でもできる.

$$[G,AF]=\begin{bmatrix}1&1&0&2&3\\1&2&0&3&5\\1&3&1&5&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&2&3\\0&1&0&1&2\\0&2&1&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}=[I_3,X]$$

(2) $[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}}=B[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}$ である．直接計算すると

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{v})&=f(x\boldsymbol{v}_1+y\boldsymbol{v}_2)=xf(\boldsymbol{v}_1)+yf(\boldsymbol{v}_2)\\&=[f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)][\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3]B[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ まず (Hint) にしたがって，逆行列を計算しておく.

$$M_1=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3],\quad M_1^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&1&7\\1&7&-5\\7&-5&1\end{bmatrix},\quad M_2=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2],\ M_2^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

(1) 標準基底における座標 $\boldsymbol{x}$ は，基底 $\mathcal{F}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ においては $M_1^{-1}\boldsymbol{x}$ と表され，さらに f で像が決まるので,

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}M_1^{-1}=\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&1&7\\1&7&-5\\7&-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/3&2/3&2/3\\-1/6&-1/6&-1/6\end{bmatrix}$$

したがって標準基底に関する f の表現行列は，$\begin{bmatrix}-1/3&2/3&2/3\\-1/6&-1/6&-1/6\end{bmatrix}$.
(2) $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{G}$ に関する座標は，$M_2\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i=1,2,3)$ を解くことで,

$$M_2^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),f(\boldsymbol{a}_3)]=\begin{bmatrix}1&1/2&0\\2&3/2&1\end{bmatrix}$$

この各行が $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{G}$ に関する座標を与えるので，$\mathcal{F},\mathcal{G}$ に関する表現行列は，$\begin{bmatrix}1&1/2&0\\2&3/2&1\end{bmatrix}$.