数学演習第二 演習 第１１回 線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標

２０１７年1月１１日 実施

$\boxed{1}$ (演習書 問題 12.1.2 (2) (3) (これは第９回でも解いている)，問題 12.2.1 (2) (3))

(2) 条件 $f\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ について，$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．また，標準基底に関する表現行列を求めよ．

(3) 条件 $f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ について，$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．また，標準基底に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の列ベクトルについて, 以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-4\end{bmatrix}.$$

・$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$, $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ は いずれも $\mathbb{R}^3$ の基底である．

(1) 基底 $\mathcal{A}$ に関する $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ の座標 $[\boldsymbol{b}_1]_\mathcal{A},[\boldsymbol{b}_2]_\mathcal{A},[\boldsymbol{b}_3]_\mathcal{A}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列（基底の取り替え行列） P を求めよ．
また，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列 Q を求めよ．

(3) 基底 $\mathcal{B}$ に関する座標が ${}^t[1,2,3]$ である列ベクトル $\boldsymbol{v}$ の $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_\mathcal{A}$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の列ベクトルについて, 以下の問に答えよ (演習書 問題 11.4.2 改題)．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}-2\\4\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-1\\7\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}-5\\5\\7\end{bmatrix}.$$

$W=\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$ とする．

(1) $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ が W の基底であることを示せ．
$\mathcal{A}$ に関する $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ の座標 $[\boldsymbol{b}_1]_\mathcal{A},[\boldsymbol{b}_2]_\mathcal{A},[\boldsymbol{b}_3]_\mathcal{A}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$ は W の基底である．
$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列（基底の取り替え行列） P を求めよ．

(3) $\mathcal{C}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3\}$ も W の基底である． $\mathcal{A}$ から $\mathcal{C}$ への基底変換行列 Q を求めよ．

(4) $\mathcal{B}$ から $\mathcal{C}$ への基底変換行列 R を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の行列 A の定める線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，つまり $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2)$ と列ベクトルについて, 以下の問に答えよ．(演習書 問題 12.2.2 (1) 加題)

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

・$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底で，$\mathcal{G}=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

(1) $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{v}_1+y\boldsymbol{v}_2$ の像 $f(\boldsymbol{v})$ の $\mathcal{G}$ に関する座標 $[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{G}}$ を B と $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{F}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ で表せ.

$\boxed{5}$ (演習書 問題 12.2.3)

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

とする．線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

という条件を満たしているとき，以下の問に答えよ.

(1) f の標準基底に関する表現行列を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底を $\mathcal{F}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$,$\mathbb{R}^2$ の基底を $\mathcal{G}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ とするとき $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(Hint) 拡大係数行列を何度も計算するよりも，$M_1=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$，$M_2=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$ の逆行列を先に計算しておくとよい.

$\boxed{要点}$ **基底変換行列** (基底の取り替え行列) ２次元の場合：

２次元の線形空間 V に対して，２種類の基底 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$,$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$ を考える.
基底 $\mathcal{B}$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ の <u>基底 $\mathcal{A}$ に関する</u> 座標 $[\boldsymbol{b}_i]_{\mathcal{A}}$ を並べた行列を作る.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1&=\alpha_{11}\boldsymbol{a}_1+\alpha_{21}\boldsymbol{a}_2 \quad\cdots\quad [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{b}_2&=\alpha_{12}\boldsymbol{a}_1+\alpha_{22}\boldsymbol{a}_2 \quad\cdots\quad [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{bmatrix}$$

この行列を「基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底変換行列」という (線形 p.162).