

数学演習第二 (第 12 回) 微積: 重積分 [2] (重積分の変数変換) 解答例

2017 年 1 月 18 日 実施分

1 (1) $u = x + y, v = x - y$ とおくと, $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

となる. このとき, 積分領域 D は $E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1/2, 0 \leq v \leq 1\}$ に移る. よって,

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \int_0^1 \sqrt{\frac{v}{1-u^2}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^1 \sqrt{v} dv = [\sin^{-1} u]_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} v\sqrt{v} \right]_0^1 = \frac{\pi}{9}$$

(2) $u = 2x + y, v = 2x - y$ とおくと, $x = \frac{u+v}{4}, y = \frac{u-v}{2}$ より $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$ で, 積分領域 D は $E = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi/3\}$ に移る. よって

$$I_2 = \int_0^\pi du \int_0^{\pi/3} e^u \tan v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \frac{1}{4} \int_0^\pi e^u [-\log |\cos v|]_0^{\pi/3} du = \frac{\log 2}{4} \int_0^\pi e^u du = \frac{(e^\pi - 1) \log 2}{4}$$

(3) $u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, v = -\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ とおくと, $x = \frac{a(u-v)}{2}, y = \frac{b(u+v)}{2}$ より, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & -a/2 \\ b/2 & b/2 \end{vmatrix} = \frac{ab}{2}$ で, 積分領域 D は $E = \{(u, v) \mid -u \leq v \leq u, 0 \leq u \leq 1\}$ に移る. よって, この変換によって

$$I_3 = \frac{\sqrt{ab}}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^u \sqrt{(u-v)(u+v)} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{u^2 - v^2} dv$$

となる. ここで, 下線部が「半径 u の四分円の面積」であることに注意すると,

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 \frac{\pi u^2}{4} du = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \frac{\pi}{4 \cdot 3} = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

が得られる. あるいは, 微積分の教科書 p.60 の公式を復習して, 次のようにも計算できる.

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \int_0^1 \left[v\sqrt{u^2 - v^2} + u^2 \sin^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) \right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \sin^{-1}(1) \int_0^1 u^2 du = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

(4) $u = \sqrt{\frac{x}{a}}, v = \sqrt{\frac{y}{b}}$ とおくと, $x = au^2, y = bv^2$ より, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$ で, 積分領域 D は $E = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1 - u, 0 \leq u \leq 1\}$ に移る. よって

$$I_4 = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (au^2)(bv^2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3v^3 dv = a^2b^2 \int_0^1 u^3(1-u)^4 du = \frac{a^2b^2}{280}$$

2 (1) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のヤコビアンは $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$ である. この変換によって, 積分領域 D は長方形 $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に移る. よって,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr = 2\pi \int_0^a r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^a = \pi \left(1 - \frac{1}{e^{a^2}} \right)$$

(2) 積分領域 D が楕円の内部であることに注意して, $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ と極座標変換を少し工夫しよう. ヤコビアンは $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$ で, D は $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に移る.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar \cos \theta + br \sin \theta)^2 abr d\theta = ab \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} \{(a^2 - b^2) \cos 2\theta + 2ab \sin 2\theta + a^2 + b^2\} d\theta = \frac{ab(a^2 + b^2)\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を施すと, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ で, 積分領域 D は $E = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ に移る. したがって, 部分積分を使って次のように計算できる.

$$J_3 = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_a^b r \log r dr = \frac{\pi}{4} \left\{ \left[\frac{r^2}{2} \log r \right]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b r dr \right\} = \frac{\pi}{16} \{b^2(2 \log b - 1) - a^2(2 \log a - 1)\}$$

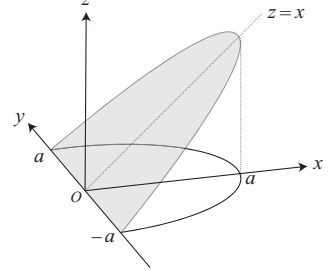
(4) ここでは, 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって解く. D が中心 $(1, 0)$ で半径 1 の円の上半分だから, (r, θ) の動く領域は $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ となる (微積の教科書 p.120 も参照). r, θ の順に積分して,

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{r \cos \theta} (r \sin \theta)^2 r dr = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{\cos \theta} (\sin^2 \theta) r^3 \sqrt{r} dr \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta \left[\frac{2}{9} r^4 \sqrt{r} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9} \left(\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} - \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} \right) = \frac{256\sqrt{2}}{945} \end{aligned}$$

[付記] 極座標変換をしない累次積分でも答えを導ける (第 10 回演習の [1] (6) を復習しながら, 計算してみよう).

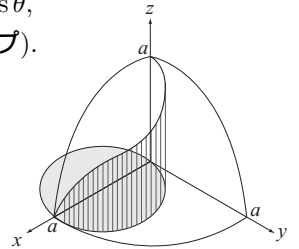
[3] (1) 題意の部分 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq x\}$ の xy 平面への射影は半円 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$ で, 求める体積は $V_1 = \iint_D x dx dy$ で与えられる. 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ で, D は $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$ に対応するので,

$$V_1 = \iint_E (r \cos \theta) r dr d\theta = 2 \left(\int_0^a r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) = \frac{2}{3} a^3$$



(2) 題意の部分 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq ax, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$ は xy 平面 ($z = 0$) や xz 平面 ($y = 0$) に関して対称だから, $x, y, z \geq 0$ の部分の体積を 4 倍すればよい. $D = \{(x, y) \mid (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{a}{2})^2, y \geq 0\}$ (半円) として, 求める体積は $V_2 = 4 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ となる. 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ で, D は $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ に移る ([2] (3) と同じタイプ).

$$\begin{aligned} V_2 &= 4 \iint_E \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{-3} \right\} dr \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left[(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=a \cos \theta} d\theta = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{2a^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$



[4] (1) $u = x + y, v = y + z, w = z + x$ とおくと,

$x = (u - v + w)/2, y = (u + v - w)/2, z = (-u + v + w)/2$ だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

と計算できる. このとき, V は $W = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$ に移り, $(x + y)(y + z)(z + x) = uvw$ だから,

$$K_1 = \iiint_W uvw \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 uvw dw = \frac{1}{2} \int_0^1 u du \int_0^1 v dv \int_0^1 w dw = \frac{1}{16}$$

(2) 3次元の極座標変換 $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ に対して, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \theta$$

となる (一度は計算しておこう). このとき V は $W = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ に移るから,

$$K_2 = \iiint_W \frac{1}{r^p} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left(\int_a^b \frac{dr}{r^{p-2}} \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \begin{cases} \frac{4\pi}{p-3} \left(\frac{1}{a^{p-3}} - \frac{1}{b^{p-3}} \right) & (p \neq 3) \\ 4\pi \log \frac{b}{a} & (p = 3) \end{cases}$$