

数学演習第二 (第12回) 微積: 重積分 [2] (重積分の変数変換)

2017年1月18日 実施

要点: 2重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を実行する際, (x, y) から適当な変数 (u, v) に変換した方が計算が楽になることは多い。
 (u, v) と (x, y) の関係が, 1対1の滑らかな関数 $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ で与えられていて,

$$\text{ヤコビアン } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

が0にならないとき,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

が成り立つ。ただし, E は uv 平面の領域。(詳しくは, 微積の教科書 pp.116-117 を参照のこと)

1 次の2重積分の値を求めよ。但し, $a, b > 0$ とする。(3), (4)の変数変換は演習書の問題6.2.2を参照せよ。

$$(1) I_1 = \iint_D \sqrt{\frac{x-y}{1-(x+y)^2}} dx dy \quad D: |x+y| \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x-y \leq 1$$

$$(2) I_2 = \iint_D e^{2x+y} \tan(2x-y) dx dy \quad D: 0 \leq 2x+y \leq \pi, 0 \leq 2x-y \leq \frac{\pi}{3}$$

$$(3) I_3 = \iint_D \sqrt{xy} dx dy \quad D: x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1 \quad (\text{問題 6.2.2 (2)})$$

$$(4) I_4 = \iint_D xy dx dy \quad D: x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1 \quad (\text{問題 6.2.2 (3) の一部})$$

2 次の2重積分の値を求めよ。但し, $a, b > 0$ とする。(演習書 問題6.2.2 参照)

$$(1) J_1 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2 \quad (\text{問題 6.2.2 (5)})$$

$$(2) J_2 = \iint_D (x+y)^2 dx dy \quad D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (\text{問題 6.2.2 (1) の類題})$$

$$(3) J_3 = \iint_D \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq y \leq x \quad (a < b)$$

$$(4) J_4 = \iint_D \sqrt{xy^2} dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$$

3 次の部分の体積をそれぞれ求めよ。但し, $a > 0$ とする。

$$(1) \text{円柱 } x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ の平面 } z = 0 \text{ の上方にあり, 平面 } z = x \text{ の下側にある部分。} \quad (\text{問題 6.4.2 (5)})$$

$$(2) \text{円柱 } x^2 + y^2 \leq ax \text{ と球 } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ の共通部分。}$$

4 次の3重積分の値を求めよ。但し, $0 < a < b$ とする。

$$(1) K_1 = \iiint_V (x+y)(y+z)(z+x) dx dy dz \quad V: 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq y+z \leq 1, 0 \leq z+x \leq 1$$

$$(2) K_2 = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad V: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$$