

2016 数学演習第二 第 13 回「行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化」解答例

① (1) $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. A の固有値は

$\lambda = 1, 2$. (2) $\lambda = 1$ のとき, $E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2$ のとき, $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3) $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

とおいて, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. (4) $A^n = \left(P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \right)^n = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n \end{bmatrix} P^{-1}$. こ

こで $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ となることから, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2 + 2^{n+1} & -1 + 2^n \\ 1 - 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n & -1 + 2^n \\ -2 + 2^{n+1} & 4 - 2^{n+2} & 2 - 2^n \end{bmatrix}$.

② (1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$. A の固有値は $\lambda = 3, -2$. $\lambda = 3$ のとき,

$3E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\lambda = -2$ のとき, $-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. よって $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & \\ & -2 \end{bmatrix}$.

(2) $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ より, 固有値は $2, 1, -1$. $\lambda = 2$ のとき,

$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\lambda = 1$ のとき, $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda = -1$ のとき, $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. よって, 固有値 $2, 1, -1$ の固有空間の

次元は, それぞれ 1 次元. 固有ベクトルとして, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れるので,

$P = [p_2, p_1, p_{-1}]$ を取れば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ となる.

(3) $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ より, 固有値は $2, 3$.

$\lambda = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ のとき, $\begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

という簡約化から, 固有値 $2, 3$ の固有空間の次元は 2 次元と 1 次元. 一次独立な固有ベクトルとして,

$p_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れるので, $P = [p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, p_3]$ と取れば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

となる.

(4) $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ より, 固有値は $1, 2$.

$\lambda = 1$ のとき, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

という簡約化から，固有値 1, 2 の固有空間はいずれも 1 次元である．したがって固有空間の次元の和が 3 にならないので対角化できない．

$$(5) \quad |\lambda E_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ -3 & -1 & \lambda - 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2 \text{ よ}$$

$$\text{り, 固有値は } 1, 2. \lambda = 1 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \lambda = 2 \text{ のとき,}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \text{よって固有値 } 1, 2 \text{ の固有空間}$$

$$\text{はともに } 2 \text{ 次元で, 一次独立な固有ベクトルとして, } p_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2^{(2)} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ が取れるので, } P = [p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}] \text{ と取れば, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

$$\boxed{3} \text{ (1) 表現行列の定義から } A \text{ に関する } f \text{ の表現行列は } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix}. |\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1). \text{よって線形変換 } f \text{ の固有値は } 0, -1, 1. \lambda = 0 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \lambda = 1 \text{ のとき, } \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \lambda = -1 \text{ のとき,}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ という簡約化から固有値 } 0, 1, -1 \text{ の固有空間の次元はすべて } 1$$

$$\text{次元. 固有ベクトルとして, } p_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, p_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, p_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ が取れるので, } V \text{ の基底として}$$

$(-4a_1 - 3a_2 + 6a_3, -2a_1 - a_2 + 3a_3, -a_1 - a_2 + a_3)$ をとれば, f の表現行列は対角行列となる.

$$\boxed{4} \text{ (1) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ とすると, 任意の自然数 } n \text{ に対して } \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \text{ が成り立つから, この関係を繰}$$

$$\text{り返して使うと, } \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{bmatrix} = \dots = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ となる. よって, } A^n \text{ を求めればよい. } \boxed{1}$$

$$\text{と同様の方法で, } P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \text{ から, } A^n = P \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & 3^n - (-2)^n \\ 4 \cdot 3^n - (-2)^{n+2} & 3^n + (-2)^{n+2} \end{bmatrix}. \text{よって, } \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \{4 \cdot 3^n + (-2)^n\} \alpha + \{3^n - (-2)^n\} \beta \\ \{4 \cdot 3^n - (-2)^{n+2}\} \alpha + \{3^n + (-2)^{n+2}\} \beta \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 微分方程式は } \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \dots (*) \text{ と表される. } \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \text{ とおくと, } \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$$

$$P \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} \text{ が確かめられ, } (*) \text{ は } P \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \text{ となり, } \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}.$$

$$\text{よって, } u'(t) = 3u(t), v'(t) = -2v(t) \text{ となり, 解析学で学習した変数分離形で } u(t) = C_1 e^{3t}, v(t) = C_2 e^{-2t} \text{ (} C_1, C_2 \text{ は任意定数) と計算できる. すると, } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{3t} + 4C_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$