数学演習第二　第13回　行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化」

(2017.1.25 実施)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

(1) A の**固有多項式** $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を計算し, A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して, 同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の**基本解** (固有値 λ に対応する 1 次独立な固有ベクトルの組) を求めよ.

(3) A を対角化せよ.
(すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. (3) では P^{-1} を計算する必要はない.)

(4) P^{-1} を求めて，行列 A の n 乗 A^n $(n \geqq 0)$ を計算せよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次のそれぞれの行列 A について，固有値をすべて求め，対角化可能かどうか判定せよ．対角化可能な場合には，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ **（木田『線形代数学講義』問 24.2）** ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ に対し,

$$f(\boldsymbol{a}_1) = 3\boldsymbol{a}_1 - 6\boldsymbol{a}_3, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = -4\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_3, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$$

で定義される線形変換 $f : V \to V$ を考える.

(1) $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) 線形変換 f の固有値をすべて求めよ.

(3) f の表現行列が対角行列となるような V の基底は存在するか．もし存在するならその基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{2}$ (1) の解答を利用して，次の問いに答えよ.

(1) 連立漸化式 $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ b_0 = \beta \end{cases}$ で定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 連立微分方程式 $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) \end{cases}$ の一般解を求めよ.