数学演習第二（演習第２回）　【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積　 2016 年 10 月 12 日 実施

1

(1) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}6\\-6\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-6\\6\\-3\end{bmatrix}$,

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}6\\-6\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\-12\\6\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}$.　(外積の結合律は不成立!)

(2) $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の満たすべき条件は $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{a}$ $({}^{\exists}t\in\mathbb{R})$, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=0$. このとき,

$$0=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-t\,\|\boldsymbol{a}\|^2$$

であるから, $t=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$. よって, $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.

(3) まず, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}=0$ より,

$$\|\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2=(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=\|\boldsymbol{p}\|^2+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+\|\boldsymbol{q}\|^2=\|\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2\ge\|\boldsymbol{p}\|^2.$$

ここで, $\|\boldsymbol{p}\|=\dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\cdot\|\boldsymbol{a}\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ より,

$$\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\ge\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{p}\|^2=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2.\qquad\therefore\ |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|.$$

(4) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-2+1-8=-9$, $\|\boldsymbol{u}\|=3$, $\|\boldsymbol{v}\|=3\sqrt{2}$. また, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 θ $(0\le\theta\le\pi)$ は,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{-9}{3\cdot3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\text{より,}\quad\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

更に, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{-9}{9}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$.

(5) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 3 列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]&=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1-(a_1b_3-a_3b_1)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

この関係式を用いて, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}]=0$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2$. あとは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}$ を示せばよい. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立より, (少なくとも) $\boldsymbol{a}$ は 0 でない成分を含む. 例えば, $a_1\ne0$ としよう. このとき, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ と仮定すれば, $b_2=(a_2/a_1)b_1$, $b_3=(a_3/a_1)b_1$ より, $\boldsymbol{b}=(b_1/a_1)\boldsymbol{a}$ となって, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の 1 次独立性に反する. $a_2\ne0$ または $a_3\ne0$ の場合も同様なので, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}$ であることが示された. ($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ne\boldsymbol{0}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立が成り立つ.)

2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}={}^{\mathrm{t}}(-2,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(1,5)$ より, ($\triangle$PQR の面積) $=\dfrac{1}{2}\left|\det[\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ \ \overrightarrow{\mathrm{PR}}]\right|=7$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}={}^{\mathrm{t}}(2,-2,-6)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}={}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)$ より, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}={}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)$ となり,

$$(\triangle\text{PQR の面積})=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\|=\frac{1}{2}\|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\|=5\sqrt{2},$$

$$(\text{四面体 PQRS の体積})=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|=\frac{1}{6}\left|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\cdot{}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)\right|=2.$$

3

(1) $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の正射影は $\dfrac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であることに注意). これより,

$$(\text{点 }\boldsymbol{x}_1\text{ と平面の距離})=(\text{上の正射影の長さ})=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d|}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\|\boldsymbol{a}\|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

なお, 垂線の足は $\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ となる.

(2) ① 平面は通る点と法線ベクトルにより決定される. まず, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ が平面 PQR の

法線ベクトルを与える．よって, 平面 PQR の方程式は

$$3(x-1)+5(y-1)+4(z-0)=0. \quad \text{これを整理して,}\ 3x+5y+4z=8.$$

次に, 点 S と平面 PQR の距離は (1) の公式を用いて, $\dfrac{|3\cdot(-1)+5\cdot 3+4\cdot 4-8|}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{50}}=2\sqrt{2}$. ($\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ への正射影の長さを計算してもよい.)

② 平面 PQR の法線は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線であるから, これが点 P を通るとき, その方程式は $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z}{4}$. 次に, 点 S からこの直線 (法線) に下ろした垂線の足を点 T とすれば, $\mathrm{T}(3t+1,5t+1,4t)$ と表されるから, $0=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3t+2\\5t-2\\4t-4\end{bmatrix}=50t-20$. よって, $t=\dfrac{2}{5}$, $\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\begin{bmatrix}16/5\\0\\-12/5\end{bmatrix}=\dfrac{4}{5}\begin{bmatrix}4\\0\\-3\end{bmatrix}$ となり, 点 S とこの直線の距離は $\|\overrightarrow{\mathrm{ST}}\|=\dfrac{4}{5}\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=4$.

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ であるから, $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}4\\-7\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-4\\7\\1\end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとなる．一方, 交線と xy 平面との交点は

$$\begin{cases}x+y-3z=1\\2x+y+z=-1\\z=0\end{cases} \quad \text{を解いて,}\quad (x,y,z)=(-2,3,0).$$

よって, 交線の方程式は $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-3}{7}=z\ \big(\Leftrightarrow\ x=-4t-2,\ y=7t+3,\ z=t\big)$.

あるいは, 交線上の点は連立 1 次方程式 $\begin{cases}x+y-3z=1\\2x+y+z=-1\end{cases}$ の解であると考えて, 行基本変形

$$\begin{bmatrix}1&1&-3&1\\2&1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&1\\0&-1&7&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4&-2\\0&1&-7&3\end{bmatrix}$$

により, 上と同じパラメータ表示を得る．次に, 2 平面のなす角 θ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$) は 2 平面の法線のなす角に等しいから, $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|}{\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|}=\dfrac{0}{\sqrt{11}\sqrt{6}}=0$. よって, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

【注】2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ であるとき, この 2 直線のなす角 θ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$) は「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角」または「$\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}$ のなす角」のいずれかで与えられる．従って, $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ が成り立つ.

(4) 直線上の点 $(5t+1,\ 3t-1,\ -4t+5)$ を $5x-4y-3z=19$ に代入して,

$$5(5t+1)-4(3t-1)-3(-4t+5)=19. \qquad \therefore\ t=1.$$

よって, 交点は $(6,2,1)$. 次に, 直線と平面のなす角を θ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$) とすれば, この直線 ($\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}$ が方向ベクトル) と平面の法線 ($\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}$ が方向ベクトル) のなす角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ であるから,

$$\sin\theta=\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\theta\Big)=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{p}\|}=\frac{|25|}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}. \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}.$$

(5) もしこのような直線が存在するならば, 与えられた 2 直線との交点は $\mathrm{P}\,(s,-2s-1,3s+1)$, $\mathrm{Q}\,(2t,-3t+1,4t+3)$ の形で与えられる．また, その方向ベクトルは, 2 直線の方向ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}$ の両方と直交するので $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ で与えられる．よって, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\parallel\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ (平行) であるから,

$$\begin{bmatrix}-s+2t\\2s-3t+2\\-3s+4t+2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}. \qquad \therefore\ s=3,\ t=2,\ k=1.$$

従って, $\mathrm{P}\,(3,-7,10)$, $\mathrm{Q}\,(4,-5,11)$ となり, 求める直線は $x-3=\dfrac{y+7}{2}=z-10$. (実は, 上の 2 点 P, Q 間の距離が 2 直線間の距離 (= 2 直線上にある 2 点間の最短距離) を与える．実際, 2 直線は, それぞれ P, Q を通り, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を法線ベクトルとする平面に含まれている．従って, 2 直線間の距離はこの平行 2 平面間の距離 $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|=\sqrt{6}$ で与えられる.)