数学演習第二（演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積

2016 年 10 月 12 日 実施

1 ［内積, 外積］ (線形 p.4, p.8)

- 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ の**外積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ で定義される.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ を計算せよ.

(2) 平面ベクトルまたは空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{a}$ (平行), $\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{a}$ (垂直)) の形に分解せよ ($\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で表せ). このとき $\boldsymbol{p}$ を「$\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向への**正射影**」と呼ぶ (線形 p.7).

(3)* (2) において, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{q}\|^2$ が成り立つことから, 不等式 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ を導け.

(4) (1) の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ および $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角を求めよ. また, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への正射影を計算せよ.

(5)* 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 列に並べてできる行列式を $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ と表すとき, これを第 3 列に関して余因子展開して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$, ② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] > 0$ (すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系).

2 ［面積, 体積］ (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

- 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = |\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]|$.
- 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| \ \left(= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\right)$,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V = \left|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\right| \ \left(= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|\right)$.

(1) $\mathrm{P}(1,-2)$, $\mathrm{Q}(-1,2)$, $\mathrm{R}(2,3)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ.

(2) $\mathrm{P}(-1,2,1)$, $\mathrm{Q}(1,0,-5)$, $\mathrm{R}(-3,1,2)$, $\mathrm{S}(2,2,-1)$ のとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積, および四面体 (三角錐) PQRS の体積を求めよ.

3 ［空間内の直線と平面］ (線形 pp.10–13)

- 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a,b,c) \neq \boldsymbol{0}$ を**方向ベクトル**とする直線は $\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \ (t \text{ は実数})}$ と表される (直線のベクトル方程式). これを成分表示し, t を消去することにより, 直線の方程式 $\boxed{\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}}$ を得る. (この表現は $abc \neq 0$ のとき意味を持つ. 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0$, $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ となる.)
- 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (1 次独立) で '張られる' 平面は $\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c} \ (s, t \text{ は実数})}$ と表される (平面のベクトル方程式). これと $\boldsymbol{a} := \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ との内積をとれば, s, t が消去され, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$. このとき, $\boldsymbol{a} = {}^t(a,b,c)$ は平面の**法線ベクトル**であり, 平面の方程式 $\boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$ が得られる. (通常は $ax + by + cz + d = 0$ あるいは $ax + by + cz = d'$ の形に整理する.)

(1)* 平面 $ax + by + cz + d = 0$ 上の点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ と, この平面上にない点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(x_1, y_1, z_1)$ に対して, $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ の $\boldsymbol{a} = {}^t(a,b,c)$ 方向への正射影を考えることにより, 点 $\boldsymbol{x}_1$ と平面の距離 (= 点 $\boldsymbol{x}_1$ からこの平面へ下ろした垂線の長さ) が $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ で与えられることを示せ.

(2) $\mathrm{P}(1,1,0)$, $\mathrm{Q}(2,-2,3)$, $\mathrm{R}(3,-1,1)$, $\mathrm{S}(-1,3,4)$ とする. ① 平面 PQR (3 点 P, Q, R を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ.) また, 点 S とこの平面の距離を求めよ. ② 点 P を通る平面 PQR の**法線**の方程式を求めよ. また, 点 S とこの直線の距離 (= 点 S からこの直線へ下ろした垂線の長さ) を求めよ.

(3) 2 平面 $x + y - 3z = 1$, $2x + y + z = -1$ の交線の方程式を求めよ. また, 2 平面のなす角を求めよ. (交線の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することに注意. また, 交線が通る点としては例えば xy 平面との交点を考えるとよい. あるいは, 交線上の点を連立 1 次方程式の解の集合と考えてもよい.)

(4) 直線 $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{-4}$ と平面 $5x - 4y - 3z = 19$ との交点を求めよ. 更に, この直線と平面とのなす角を求めよ. (この直線と平面に対する法線とのなす角に注目せよ.)

(5) 2 直線 $x = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$ の両方と垂直に交わる直線の方程式を求めよ.