2016 数学演習第二 第 3 回「ベクトル空間・部分空間」解答例

$\boxed{1}$ **部分空間となっているのは，(6)(8)(9).**

	(i)	(ii)	(iii)
(1)	×	×	×
(2)	○	×	○
(3)	○	×	×
(4)	○	○	×
(5)	○	○	×
(6)	○	○	○
(7)	○	×	○
(8)	○	○	○
(9)	○	○	○
(10)	×	×	×

(1) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\notin W$，$0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\notin W$．(2) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\notin W$．$xyz=0$ のとき，$(kx)(ky)(kz)=k^3xyz=0$ だから (iii) は成立．(3) $\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\notin W$，$(-1)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\notin W$．(4) k が整数でない実数なら，$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\notin W$．(5) $k<0$ なら $k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\notin W$．(6) $\mathbf{0}\in W$．$x+2y+z=0$ のとき $(kx)+2(ky)+(kx)=0$ が成り立つから (iii) が成り立つ．さらに $x'+2y'+z'=0$ のとき，$(x+x')+2(y+y')+(z+z')=(x+2y+z)+(x'+2y'+z')=0$ なので (ii) も成り立つ．

(7) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\notin W$，$x^2+y^2=z^2$ のとき，$(kx)^2+(ky)^2=(kz)^2$ だから (iii) は成立．(8) (6) と同じようにしてチェックできるが，(6)(8) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間（**教科書 命題 15.4**）．(9) まず $\begin{cases}x+2y+3z=0\\x-4y+3z=0\\x-3y+3z=0\end{cases}$ は解 $x=y=z=0$ を持つから，$\mathbf{0}\in W$．また，$\begin{cases}x+2y+3z=a\\x-4y+3z=b\\x-3y+3z=c\end{cases}$ が解 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ を持つとき，$x=kx_0, y=ky_0, z=kz_0$ とすれば $\begin{cases}x+2y+3z=ka\\x-4y+3z=kb\\x-3y+3z=kc\end{cases}$ の解になる．つまり $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in W$ のとき，$\begin{bmatrix}ka\\kb\\kc\end{bmatrix}\in W$ となるから，(iii) が成立．さらに，$\begin{cases}x+2y+3z=a'\\x-4y+3z=b'\\x-3y+3z=c'\end{cases}$ が解 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ を持つとき，$x=x_0+x_1, y=y_0+y_1, z=z_0+z_1$ とすれば $\begin{cases}x+2y+3z=a+a'\\x-4y+3z=b+b'\\x-3y+3z=c+c'\end{cases}$ の解になる．つまり，つまり $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}\in W$ のとき，$\begin{bmatrix}a+a'\\b+b'\\c+c'\end{bmatrix}\in W$ となるから，(ii) が成り立つ．

(10) 非同次形連立一次方程式 $(*)\cdot\begin{cases}x+2y+3z=1\\x-4y+3z=1\\x-3y+3z=1\end{cases}$ は $x=y=z=0$ を解に持たないので，$\mathbf{0}\notin W$．$\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix}$ $(i=1,2)$ が $(*)$ の解のとき，$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=(x_1+2y_1+3z_1)+(x_2+2y_2+3z_2)=1+1=2$ になってしまうので，2 つの解の和は $(*)$ を満たさず (ii) は成り立たない．また，$(kx_1)+2(ky_1)+3(kz_1)=k(x_1+2y_1+3z_1)=k$ だから $k\neq 1$ では，解の k 倍は $(*)$ を満たさず (iii) は成り立たない．

$\boxed{2}$ (1) $\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&-4\\2&4&4&-8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&-4\\0&0&2&0\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v}\notin W$．$\boldsymbol{w}\in W$．(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc}1&2&-3&4&-4\\-1&5&-4&3&3\\3&-7&4&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|cc}1&2&-3&4&-4\\0&7&-7&7&-1\\0&-13&13&-13&13\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|cc}1&2&-3&4&-4\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&0&6\end{array}\right]$ より $\boldsymbol{v}\in W$．$\boldsymbol{w}\notin W$．(4) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&3\\1&-1&4&9\\3&2&-7&-5\\-2&3&-6&-7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&3\\0&-3&7&6\\0&-4&2&-14\\0&7&-12&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&3\\0&-3&7&6\\0&-4&2&-14\\0&0&-3&-9\end{array}\right]\to$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より $\boldsymbol{v} \in W$．(5) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 27 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$．

$\boxed{3}$ (1) W_1 は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線，すなわち $y = 3x$．同様に W_2 は $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$．共通部分は $\{\boldsymbol{0}\}$．和集合はこの 2 つの直線全体である．$\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ の和 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \notin W_i \ (i = 1, 2)$ だから $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \notin W_1 \cup W_2$．つまり $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．平面上のベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ に対して，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ となる c_1, c_2 は，$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ の解なので，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+2q}{7} \\ \frac{-3p+q}{7} \end{bmatrix}$ となる．つまりどんなベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ も，$\dfrac{p+2q}{7}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{-3p+q}{7}\boldsymbol{v}_2$ と表せるので，和空間 $W_1 + W_2$ に属する．よって $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ である．(図示はいずれも省略．)

(2) $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in W_2$ となるための条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & p \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & -4 & p+q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & p+q+4r \end{array}\right] \to$ より，$p + q + 4r = 0$ である．これは W_1 が平面 $x + y + 4z = 0$ であることを意味している．図形的に見ると，W_1 に属する元は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と表される元全体なので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するベクトルすなわち外積ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ と直交している．ここからも W_1 は平面 $x+y+4z=0$ とわかる．同様に $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 3p+q-4r \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x+y-4z=0$ となる．これは $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ に直交する平面である．$W_1 \cap W_2$ は，2 つの平面の共通部分なので，$x+y+4z=0$ と $3x+y-4z=0$ を連立させると，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ より，$W_1 \cap W_2$ に属する元は $k \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は実数) と表せる．これは方向ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線を表す．図形的には $W_1 \cap W_2$ に属する元は，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ の両方と直交するので，外積ベクトル $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線になる．最後に，和空間は $\mathbb{R}^3$ に一致する．なぜなら，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 1 & 0 & p \\ 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & -2 & 8 & p+q+4r \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & \frac{-3p+q+12r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -\frac{p+q+4r}{2} \end{array}\right]$ となるので，$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = -\dfrac{3p+q+12r}{2}\boldsymbol{a}_1 + r\boldsymbol{a}_2 - \dfrac{p+q+4r}{2}\boldsymbol{a}_3$ と表せることがわかる．よって $\mathbb{R}^3$ のどんな元も $W_1 + W_2$ に属する．和集合 $W_1 \cup W_2$ が部分空間ではないことは，例えば，平面 $x + y + 4z = 0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $3x + y - 4z = 0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ の和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ が，$x + y + 4z = 0$ 上にも $3x + y - 4z$ 上にもないことからわかる．