数学演習第二　第3回　「ベクトル空間・部分空間」

(2016.10.19 実施)

【要点：教科書命題 15.2】ベクトル空間 V の部分集合 W が V の**部分空間**であるための必要十分条件は次の 3 条件すべてを満たすことである；
(i) $\mathbf{0} \in W$.　(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.　(iii) $\boldsymbol{a} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W$.

$\boxed{1}$ ［**部分空間の判定**］　数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の次の部分集合 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になるかどうかを上の 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たすかどうか調べることにより判定せよ．部分空間にならない場合には，3 つの条件のうち満たされていないものを全て列挙せよ．

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xyz = 0 \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, xyz \geqq 0 \right\}$

(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, y, z \text{ は整数} \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, y, z \text{ は全て } \geqq 0 \right\}$

(6) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + z = 0 \right\}$

(7) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

(8) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{matrix} \right\}$

(9) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} \text{連立一次方程式} \\ \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases} \\ \text{が解を持つ．} \end{matrix} \right\}$

(10) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{matrix} \right\}$

【要点】　数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ に対して，

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle \ni \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b} \text{ と表せる．}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{非同次連立一次方程式 } [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ．}$$

$$\overset{\text{教科書 定理 8.4}}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}].$$

なお，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ，$[\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い．

$\boxed{\mathbf{2}}$ ［**生成される部分空間**］ 次のそれぞれの部分空間 W に対して，与えられた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ.（**演習書　問題 11.2.6(1)(2)(4)(5)**）

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$

(5) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

【要点】 ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し，

$$W_1, W_2 \text{の}\textbf{共通部分}\quad W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in W_1 \text{かつ}\ \boldsymbol{v} \in W_2\}$$
$$W_1, W_2 \text{の}\textbf{和空間}\quad W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}$$

は，いずれも V の部分空間となる（**教科書命題 15.10，命題 15.12**）.

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［**和空間と共通部分**］

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

について，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ を図示せよ．また，和集合 $W_1 \cup W_2$ は部分空間でないことをチェックせよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか述べよ．また和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではないことをチェックせよ.