平成 27 年度 数学演習第二 演習 第 4 回　微積：偏微分 [1]（偏微分，合成関数の微分）　解答例

2016 年 10 月 26 日 実施分

$\boxed{1}$ $f_x(x,y) := \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $f_y(x,y) := \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ がそれぞれの定義式である．
$f \in C^2(D)$ ならば，$f_{xy}(x,y) := (f_x)_y(x,y) = (f_y)_x(x,y) =: f_{yx}(x,y)$ $((x,y)\in D)$ に注意しておく．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$，
$f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}$. $(x^2+2y^2)(f_x)^2 = x^2$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$2x(f_x)^2 + 2(x^2+2y^2)f_x\, f_{xx} = 2x$, $2(x^2+2y^2)f_x\, f_{xx} = 2x\{1-(f_x)^2\} = \dfrac{4xy^2}{x^2+2y^2}$ より, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(x^2+2y^2)^2 f_x} = \dfrac{2y^2}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$ を得る．同様にして, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{2x^2}{(x^2+2y^2)^{3/2}}$ がわかる．

(3) $f(x,y) = \dfrac{\log_e y}{\log_e x}$ より，$f_x(x,y) = -\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}$，$f_y(x,y) = \dfrac{1}{y\log x}$，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \dfrac{2\log y}{x^2(\log x)^3}$，
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{1}{xy(\log x)^2}$，$f_{yy}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2\log x}$.

(4) $f_x(x,y) = -\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_y(x,y) = \dfrac{x}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_{xx}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$，
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{1}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y^3}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f_{yy}(x,y) = -\dfrac{2x}{y^3}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^4}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

(5) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)f = xy(x^2-y^2)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$2xf + (x^2+y^2)f_x = y(x^2-y^2)+2x^2y$, $(x^2+y^2)f_x = \dfrac{\{y(x^2-y^2)+2x^2y\}(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より，$f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う．同様にして，$f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ も得られる．また，$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ は定義から容易にわかる．次に，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$(x^2+y^2)^2 f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺をそれぞれ x で偏微分すると，$4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2)-(x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より，$f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る．同様にして，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を知る．そして，$f_x(x,0) = 0 = f_x(0,0)$ から，$f_{xx}(0,0) = 0$ や，$f_y(0,y) = 0 = f_y(0,0)$ より，$f_{yy}(0,0) = 0$ は容易に確かめられる．更に，$f_x(0,y) = -y$ から，$f_{xy}(0,0) = -1$ で，$f_y(x,0) = x$ より，$f_{yx}(0,0) = 1$ が導かれる．よって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない．$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる)．(5) の $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である．

$\boxed{2}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ を適用する解答例を与える．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{(y/x)_x}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(y/x)_y}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\varphi'(t) = 2$, $\psi'(t) = -2t$ より，
$g'(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) = \dfrac{-(1-t^2)\cdot 2 + 2t(-2t)}{(2t)^2+(1-t^2)^2} = -\dfrac{2}{t^2+1}$.
(実は，$\mathrm{Tan}^{-1}u + \mathrm{Tan}^{-1}(1/u) = \pm\pi/2$ $(u \gtrless 0)$, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = \pi + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t<-1)$, $2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(|t|<1)$, $-\pi + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t>1)$ から，$g(t) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1-t^2}{2t} = \pm\pi/2 - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}t$ $(t\gtrless 0)$ である.)

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{2x}{1+x^2+3y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{6y}{1+x^2+3y^2}$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = e^t$ より，$g'(t) = \dfrac{2(t^2+1)\cdot 2t + 6e^t\cdot e^t}{1+(t^2+1)^2+3(e^t)^2} = \dfrac{4t^3+4t+6e^{2t}}{t^4+2t^2+2+3e^{2t}}$.

$\boxed{3}$ 合成関数の微分に関する連鎖律 $\dfrac{\partial z}{\partial *} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial *} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial *}$ $(* = u \text{ or } v)$ を適用する解答例を与える．

(1) $f(x,y) = y^x = e^{x\log y}$ だから, $f_x(x,y) = y^x \log y$, $f_y(x,y) = xy^{x-1}$. さらに $\varphi_u(u,v) = -v/(u^2)$, $\varphi_v(u,v) = 1/u$, $\psi_u(u,v) = 2u$, $\psi_v(u,v) = 2v$ だから, $z_u(u,v) = f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)$ $= v(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{-\dfrac{u^2+v^2}{u^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$, $z_v(u,v) = \dfrac{v^2}{u}(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{\dfrac{u^2+v^2}{v^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$. ただし, $z(u,v) = (u^2+v^2)^{v/u}$ を u, v でそれぞれ偏微分することもできる.

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\varphi_u(u,v) = \cos v$, $\varphi_v(u,v) = -u\sin v$, $\psi_u(u,v) = \sin v$, $\psi_v(u,v) = u\cos v$ より，$z_u(u,v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}\cos v + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}\sin v = 0$ と，$z_v(u,v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}(-u\sin v) + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}(u\cos v) = -4\cos v\sin v$ を得る．ただし, $z(u,v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$ を u, v でそれぞれ偏微分する方が簡単である.

$\boxed{4}$ この問題のように具体的に表せない関数の微分にこそ連鎖律が有効である.

(1) $y_v = 0$ ならば，$y(u,v) = y(u,0) + \displaystyle\int_0^v y_v(u,s)\,ds = y(u,0)$ は u だけの関数である．逆に，任意の $h \in C^1(\mathbb{R})$ に対して，$y(u,v) = h(u)$ ならば，$y_v = h_v = 0$ をみたす.

(2) $0 = z_{uv} = (z_u)_v$ のとき，(1) より，或る $h \in C^1(\mathbb{R})$ を用いて，$z_u(u,v) = h(u)$ と書ける．そこで，$f(u) = \displaystyle\int h(u)\,du$ とおくと，$(z-f)_u = z_u - h = 0$ なので，再び (1) から，或る $g \in C^2(\mathbb{R})$ によって，$z(u,v) - f(u) = g(v)$ と表される．逆に，任意の $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ に対して，$z = f(u) + g(v)$ は，$z_u = f_u(u)$ より，$z_{uv} = f_{uv} = 0$ をみたす.

(3) $u = x+ct$, $v = x-ct$ より，$w(t,x) = z(x+ct, x-ct)$ であるから，$w_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v$, $w_t = z_u u_t + z_v v_t = c(z_u - z_v)$, $w_{xx} = (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x) + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x) = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$, $w_{tt} = c\left\{(z_{uu}u_t + z_{uv}v_t) - (z_{vu}u_t + z_{vv}v_t)\right\} = c^2(z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv})$ がわかる.

(4) (3) より，$0 = w_{tt} - c^2 w_{xx} = -4c^2 z_{uv}$ なので，$z_{uv} = 0$ をみたす．よって，(2) から，$w(t,x) = z(u,v) = f(u) + g(v) = f(x+ct) + g(x-ct)$ と表される.

$\boxed{5}$ 一般に，3 種類の極限には論理的な関係はないので，(a) の極限または (b) の極限が存在しないことから，(c) の極限が存在しないとは云えないし，(c) の極限が存在しても，(a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$. この場合, $f(x,y)$ の x 軸に沿って原点に近づいた極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づいた極限 $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ はよいだろう．(c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ が有効で，このとき $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ と同じなので，あたかも（θ をパラメータと見なして）r の 1 変数関数のように扱える．実際，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと，$f(x,y) = \cos\theta\sin\theta = (1/2)\sin 2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから，(c) の極限は存在しない.

(3) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leqq 1$ により $|f(x,y)| \leqq |x|$ なので，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が得られる.

(4) $|f(x,y)| \leqq |x|$ $(y \neq 0)$ から，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ がわかる．一方，$x \neq 0$ として，例えば $y = \dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を考えると，$n \to \infty$ ならば，$0 \neq y \to +0$ で，$f(x,y) = (-1)^n x \in \{\pm x\}$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$ は存在しない．よって，(b) の極限も存在しない.

$\boxed{\text{補足}}$ $\boxed{1}$ (5) などを回顧すれば，(a) の極限や (b) の極限は自然に現れることがわかる．実際，

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = -1$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) = 1$$

よって，$f(x,y) = xy\,g(x,y)$, $g(tx,ty) = g(x,y)$ $(t \neq 0)$, $g(1,0) \neq g(0,1)$ をみたす g であれば，$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ は成り立つ．但し，$g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ から $(0,0)$ を除いた $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ で定義されていて，$f(0,0) = 0$ とする.