

数学演習第二 第5回 「一次独立・一次従属, 基底と次元」

(2016.11.2 実施)

【要点】 数ベクトル空間 \mathbb{R}^m の元 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ に対して,

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が一次独立

$\Leftrightarrow c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ となる c_1, \dots, c_k は $c_1 = \dots = c_k = 0$ に限る.

\Leftrightarrow 同次連立一次方程式 (*) $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ が自明な解のみを持つ.

教科書 定理 8.8(i)
 $\Leftrightarrow \text{rank}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k] = k$

なお, 一次従属の場合に非自明な一次関係式 $c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ を求めたければ, $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ の簡約行列から (*) の解 c_1, c_2, \dots, c_n を読み取ればよい.

1 [数ベクトルの一次独立性の判定と非自明な一次関係式] 次のベクトルが一次独立かどうか判定し, 一次従属の場合には, 非自明な一次関係式を求めよ (演習書 11.3.1(1)(3)(5) 他)

(1) $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 17 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2 [一次独立性] ベクトル空間 V に属する4つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ が一次独立であるとする.

(1) V 中の次のベクトルの組は一次独立かどうか判定せよ. 一次従属の場合には, 非自明な一次関係式を求めよ.

(i) $(\mathbf{a}_1 = -\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{a}_2 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - 8\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{a}_3 = -6\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2 + 17\mathbf{v}_3)$

(ii) $(\mathbf{a}_1 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,$
 $\mathbf{a}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)$

(2) V 中の次のベクトルの組が一次従属となるような定数 k を求め, そのときの非自明な一次関係式を求めよ.

$(\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{a}_2 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3)$

【要点】 ベクトル空間 V の元の組 (v_1, \dots, v_n) が次の2つの条件

(i) v_1, \dots, v_n は V を生成する．すなわち， $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ．

(ii) v_1, \dots, v_n は一次独立である．

を共に満たすとき， (v_1, \dots, v_n) は， V の基底であるという．基底の取り方は一意ではないが，(有限個の元から生成されている) ベクトル空間の基底をなす元の個数はただ一つに定まる．この値をベクトル空間 V の次元という．

3 [数ベクトル空間の基底と次元] 次のベクトルの組のうち， \mathbb{R}^3 の基底になっているものをすべて答えよ．

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &: \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) & \mathcal{F} &: \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \mathcal{G} &: \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) & \mathcal{H} &: \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

4 [部分空間の基底と次元] 次の3つの \mathbb{R}^3 の部分空間 W_1, W_2, W_3 の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\}, \quad W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases} \\ \text{が解を持つ} \end{array} \right\}$$

5 [部分空間の基底] \mathbb{R}^4 の部分空間

$$W = \left\langle \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(2) 次のうち， W の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathcal{E} : (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \quad \mathcal{F} : (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4), \quad \mathcal{G} : (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \quad \mathcal{H} : (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$$

(3) $\left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$ は W の基底であることを示せ．