

数学演習第二 (演習 第6回) 略解

微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値)

2016年11月9日実施

1 次の2変数関数のマクローリン展開の公式を利用する

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\} \\ + \frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3\} + \dots \quad (\text{a})$$

(1) $f(x, y) = e^{ax} \sin by$ より,

$$f_x = ae^{ax} \sin by, f_y = be^{ax} \cos by, f_{xx} = a^2 e^{ax} \sin by, f_{xy} = abe^{ax} \cos by, f_{yy} = -b^2 e^{ax} \sin by, \\ f_{xxx} = a^3 e^{ax} \sin by, f_{xxy} = a^2 be^{ax} \cos by, f_{xyy} = -ab^2 e^{ax} \sin by, f_{yyy} = -b^3 e^{ax} \cos by.$$

点 $(0, 0)$ での値を (a) に代入して,

$$e^{ax} \sin by = by + \frac{1}{2}(2abxy) + \frac{1}{3!}(3a^2bx^2y - b^3y^3) + \dots = by + abxy + \frac{1}{2}a^2bx^2y - \frac{1}{6}b^3y^3 + \dots$$

【別解】 1変数のマクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots$$

を利用する. 1変数関数 e^{ax} と $\sin by$ を3次の項まで展開して

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \dots, \quad \sin by = by - \frac{1}{3!}b^3y^3 + \dots$$

2変数多項式として4次以上の項を無視して展開し, 上べきの順に並べると

$$e^{ax} \sin by = \left(1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \dots\right) \left(by - \frac{1}{3!}b^3y^3 + \dots\right) = by + abxy + \frac{1}{2}a^2bx^2y - \frac{1}{6}b^3y^3 + \dots$$

(2) (a) の展開式を利用するのよいが, 等比級数の公式

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad (|r| < 1)$$

を用いることもできる. 4次以上の項を無視して

$$\frac{1}{3+2x-y} = \frac{1}{3\{1 - \frac{(-2x+y)}{3}\}} = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{-2x+y}{3}\right) + \left(\frac{-2x+y}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2x+y}{3}\right)^3 + \dots \right\} \\ = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{1}{27}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{1}{81}(-8x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3) + \dots$$

(3) (a) の展開式を利用するのよいが, $\log(1+t)$ の3次のマクローリン展開 $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \dots$ に $t = -x + 2y$ を代入して,

$$\log(1-x+2y) = (-x+2y) - \frac{1}{2}(-x+2y)^2 + \frac{1}{3}(-x+2y)^3 + \dots \\ = -x + 2y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - 2y^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + \frac{8}{3}y^3 + \dots$$

を得る.

【参考】 n 次多項式 $g(x, y)$ が $f(x, y)$ の n 次マクローリン展開であることと

$$f(x, y) = g(x, y) + o((\sqrt{x^2 + y^2})^n) \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)) \quad (\text{b})$$

が成り立つことは同値である. この事実は, (a) で定義された $f(x, y)$ の n 次マクローリン展開は, (a) を用いなくても, (b) を満たす n 次多項式 $g(x, y)$ を見つけることができれば, $g(x, y)$ が $f(x, y)$ の n 次マクローリン展開となることを示している. これより上の様な (a) を用いないマクローリン展開の導出が許される.

(3), (4), (5) は $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, D(0,0) = 0$ となる問題である. ここで

$$D(x,y) := f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

とおいた. 極値の定義が以下のように与えられることに注意して, $f(0,0)$ が極値かどうか判定する.

$f(a,b)$ が極大値 (または極小値) であるとは, (a,b) に十分近い (a,b) 以外の全ての点で, 不等式 $f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$) が成り立つときをいう. 【注】この定義において, $<$ ($>$) を \leq (\geq) で置き換えて, 広義の極大値 (広義の極小値) を定義することがある.

- (1) $f(x,y) = \sin x \sin y$. $f_x = \cos x \sin y, f_y = \sin x \cos y$ より, $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$. $f_{xx} = -\sin x \sin y, f_{xy} = \cos x \cos y, f_{yy} = -\sin x \sin y$ より, $D(0,0) = -1 < 0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
- (2) $f(x,y) = a^{x+y}(x^2 + y^2)$. $f_x = a^{x+y}((x^2 + y^2) \log a + 2x), f_y = a^{x+y}((x^2 + y^2) \log a + 2y)$ より, $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$. $f_{xx} = a^{x+y}((x^2 + y^2)(\log a)^2 + 4x \log a + 2), f_{xy} = a^{x+y}((x^2 + y^2)(\log a)^2 + 2x \log a + 2y \log a), f_{yy} = a^{x+y}((x^2 + y^2)(\log a)^2 + 4y \log a + 2)$ より, $D(0,0) = 4 > 0, f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値を取る.
- (3) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 = (x - y^2)^2$. $(x,y) \neq (0,0)$ が $x = y^2$ を満たすとき $f(x,y) = 0 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
- (4) $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 + x^2 + 2xy + y^2$. $f(x,y) = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) + (x+y)^2 = (x+y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 + x + y)$ より $f(x,-x) = 0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
- (5) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. $x \neq 0$ のとき $f(x,x) = 2x^4 > 0 = f(0,0)$ であるが, 十分小さな y に対して $f(0,y) = y^2(y^2 - 2) < 0$ なので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.

以下の極値を取るための十分条件を利用する $f(x,y)$ が (a,b) の近くで, 連続な 2 階偏導関数を持ち, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする. さらに, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とおくと,

- (i) $D(a,b) > 0$ のとき, $\begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 \implies f(a,b) \text{ は極小値,} \\ f_{xx}(a,b) < 0 \implies f(a,b) \text{ は極大値.} \end{cases}$ (極値を取るための十分条件)
- (ii) $D(a,b) < 0$ のとき, $f(a,b)$ は極値でない.
- (iii) $D(a,b) = 0$ のとき, 極値を取ることも取らないこともあり, これだけでは判定できない. (2 参照)

- (1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$. $\begin{cases} f_x = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y = -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (2,3)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = 2, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$ より, $D(2,3) = f_{xx}(2,3)f_{yy}(2,3) - f_{xy}(2,3)^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. よって, $f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3) = -7$ を取る.
- (2) $f(x,y) = x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2$. $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(x-1)(2x-1) = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases}$ より $(x,y) = (0,0), (1,0), (1/2,0)$ (この 3 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 12x^2 - 12x + 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4(6x^2 - 6x + 1)$. $D(0,0) = D(1,0) = 4 > 0, f_{xx}(0,0) = f_{xx}(1,0) = 2 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0), (1,0)$ で極小値 $f(0,0) = f(1,0) = 0$ を取る. 一方, $D(1/2,0) = -2 < 0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない.
- (3) $f(x,y) = xy(x+y-1)$. $\begin{cases} f_x = y(2x+y-1) = 0 \\ f_y = x(x+2y-1) = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (0,0), (1,0), (0,1), (1/3, 1/3)$ (この 4 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 2y, f_{xy} = 2x + 2y - 1, f_{yy} = 2x$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4xy - (2x + 2y - 1)^2$. $D(0,0) = D(1,0) = D(0,1) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0), (1,0), (0,1)$ で極値を取らない. 一方 $D(1/3, 1/3) = 1/3 > 0, f_{xx}(1/3, 1/3) = 2/3 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(1/3, 1/3)$ で極小値 $f(1/3, 1/3) = -1/27$ を取る.
- (4) $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2$. $\begin{cases} f_x = 3x^2 + 4x + y = 0 \\ f_y = x + 2y = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (0,0), (-7/6, 7/12)$ (この 2 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 6x + 4, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 12x + 7$. $D(0,0) = 7 > 0, f_{xx}(0,0) = 4 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ を取る. 一方, $D(-7/6, 7/12) = -7 < 0$, より, $f(x,y)$ は $(-7/6, 7/12)$ で極値を取らない.
- (5) $f(x,y) = \sin x + \cos y$. $\begin{cases} f_x = \cos x = 0 \\ f_y = -\sin y = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l)$ ($k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$). $f_{xx} = -\sin x, f_{xy} = 0, f_{yy} = -\cos y$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = \sin x \cos y$. $(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l)$ (k, l は共に奇数) においては $D(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = 1 > 0, f_{xx}(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = 1 > 0$ より, $f(x,y)$ は極小値 $f(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = -2$ を取る. また, $(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l)$ (k, l は共に偶数) においては $D(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = 1 > 0, f_{xx}(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は極大値 $f(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = 2$ を取る. 一方, $(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l)$ (k : 偶数, l : 奇数) or (k : 奇数, l : 偶数) においては $D(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi l) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は極値を取らない.