

2016 数学演習第二 第 7 回「座標，行列の零空間・列空間・行空間」解答例

① (1)  $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  より,  $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{b}_1 = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3$  より,  $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}}$  は, 非同次形連立一次方程式  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$  を解く. 拡大係数行列  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 | \mathbf{b}_1]$  を簡約化

するか,  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  を求めて左から両辺に掛ける.  $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ . (2)  $p\mathbf{a}_1 + q\mathbf{a}_2 +$

$r\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$  だから, 非同次形連立一次方程式  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}$  を解く. 拡大係

数行列  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 | \begin{bmatrix} p+q \\ p+q+r \\ p+r \end{bmatrix}]$  を簡約化するか,  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  を求めて左から掛ける.

$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} p+2q-2r \\ p+2q+2r \\ p-2q+2r \end{bmatrix}$ .

②  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_i$  ( $i = 1, 2$ ) となる  $c_1, c_2$  をそれぞれ求めればよい. この 2 つの非同次形連立一次方程

式を同時に扱う.  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 10 \\ 0 & -8 & -16 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  より,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ ,

$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  となるから,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V$  であり,  $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

③ 行列  $A$  の零空間, 行空間, 列空間の基底は  $A$  の簡約行列をもとに考える. 零空間  $N(A)$  の次元は  $A$  の列数  $-\text{rank } A$  であり, 基底は, 同次形連立一次方程式  $Ax = 0$  の基本解を選べばよい.  $\dim C(A) = \text{rank } A$  であり, 行基本変形で行空間は変わらないから, 簡約行列の 1 行目から  $\text{rank } A$  行目までを取ればよい.  $\dim R(A) = \text{rank } A$  であり, 列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列  $A$  の列を取ればよい.

(1)  $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . よって  $\dim N(M_1) = 2$  であり, 基底は  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

$\dim R(M_1) = 2$  であり, 基底は  $([1, 0, -1, -2], [0, 1, 2, 1])$ .  $\dim C(M_1) = 2$  であり, 基底は  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ .

(2)  $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .  $\dim N(M_2) = 2$  であり, 基底は  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

$\dim R(M_2) = 3$  であり,

基底は  $([1, 0, -1, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 2], [0, 0, 0, 1, 3])$ .  $\dim C(M_2) = 3$  であり, 基底は  $\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ .

(3)  ${}^tM_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  より,  $\dim N({}^tM_2) = 1$  であり, 基底は  $\left( \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

$\dim R({}^tM_2) = 3$  であり基底は,  $([1, 0, 0, -3], [0, 1, 0, \frac{5}{2}], [0, 0, 1, \frac{5}{2}])$ .  $\dim C({}^tM_2) = 3$  であり,

$$\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad [\text{注意}] \quad C(M_2) \text{ の基底は } R(M_2) \text{ の基底を転置したのもでも可. } R(M_2) \text{ の基底は } C(M_2) \text{ の基底を転置したのもでも可.}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{だから, } \dim W_1 = \dim C(A_1) = 2 \text{ であり, 基底は}$$

$$\left( \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right). \quad \text{また } W_2 \text{ を生成する 3 つの列ベクトルは明らかに一次独立だから,}$$

$$\dim W_2 = 3 \text{ であり, 基底は } \left( \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{より, } \dim W = \dim N(A) = 2 \text{ であり, 基底は } \left( \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad (2) \quad c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W \text{ となる条件は, } \begin{cases} (c_1 + 2c_2) + (c_1 + c_2) - (c_1 + 2c_2) = 0 \\ (c_1 + 2c_2) + 2(c_1 + c_2) + (-c_1 - 2c_2) = 0 \end{cases} \quad \text{だから, } c_1 + c_2 = 0.$$

$$\text{よって } W_1 \cap W \text{ の元は } c_1 \mathbf{a}_1 - c_1 \mathbf{a}_2 = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ と表せることになるので, } \dim W_1 \cap W = 1 \text{ であり,}$$

$$\text{基底は } \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right). \quad \text{他方, } W_1 + W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \text{ であり, } [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{から, } \dim(W_1 + W) = 3 \text{ であり基底は } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1) \text{ である. } \dim W_1 = 2, \dim W = 2, \dim W_1 \cap W = 1, \dim(W_1 + W) = 3 \text{ だから次元公式を満たしている.}$$

$$(3) \quad W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$$

$$\text{であり, } [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{となって階数 4 になるので, } \dim(W_1 + W_2) = 4, \text{ つまり } W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4 \text{ である. 基底は } (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1) \text{ でもよいし, } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ としても可.}$$

$$\text{また, } c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 \in W_2 \text{ となるための } c_1, c_2 \text{ の条件は, } [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} \text{ が解を持つこと.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & c_1 + 2c_2 \\ 0 & 1 & 1 & | & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -c_1 - 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & c_1 + 2c_2 \\ 0 & 1 & 1 & | & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -c_1 - 2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2c_1 + 4c_2 \end{bmatrix} \quad \text{より, 求める条件は } 2c_1 + 4c_2 = 0, \text{ つまり } c_1 = -2c_2. \text{ よって}$$

$$W_1 \cap W_2 \text{ の元は } -2c_2 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ と表せるので, } \dim W_1 \cap W_2 = 1 \text{ であり, 基底は } (e_2).$$