平成 28 年度 数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3]（陰関数）　解答例

2016 年 12 月 7 日 実施分

$\boxed{1}$ 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで C^1 級のとき，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ ならば，(a,b) の近くで $f(x,y)=0$ という関係は x の C^1 級関数 $y=y(x)$ の形に表される．この '陰関数' $y(x)$ は $f(x,y(x))=0$ をみたす.（これは記号の濫用で本来は $y=\varphi(x)$ などと別な文字で書く方が正当である.）陰関数は (a,b) の近くで一意的に定まるが，$x=a$ の近くでは一意とは限らない．例えば，$x^2+y^2-1=0$ の陰関数は $y(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$ である．

(0)　$0=f(x,y(x))=2x^2-2xy+y^2-1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=4x-2y-2xy'+2yy'=2(2x-y)-2(x-y)y' \qquad \therefore y'(x)=\frac{2x-y}{x-y} \quad \text{特に} \quad y'(0)=1$$

よって，点 $(0,1)$ における $y=y(x)$ の接線の方程式は　$y=y'(0)x+1=x+1$

そして，$0=2x-y-xy'+yy'$ の両辺をそれぞれ x で微分して

$$0=2-y'-y'-xy''+(y')^2+yy''=2-2y'+(y')^2-(x-y)y'' \qquad \therefore y''(x)=\frac{2-2y'+(y')^2}{x-y}$$

ここで，$y''(x)$ に $y'(x)$ の計算結果の式を代入するのは賢明でなく，$(x-y)y'=2x-y$ に注目して

$$\begin{aligned}(x-y)^2\{2-2y'+(y')^2\}&=2(x-y)^2-2(x-y)\{(x-y)y'\}+\{(x-y)y'\}^2=(x-y)^2+\{(x-y)-(2x-y)\}^2\\&=(x-y)^2+x^2=1 \qquad \therefore y''(x)=\frac{1}{(x-y)^3}\ \ (\neq 0)\end{aligned}$$

(2)　$0=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2$ の両辺をそれぞれ x で微分すると　$0=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$　　$\therefore y'(x)=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

特に，$y'(1)=-1$ より，点 $(1,1)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(1)(x-1)+1=-x+2$

そして，$0=x(y')^2-y$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=(y')^2+2xy'y''-y' \quad \therefore y''(x)=\frac{y'-(y')^2}{2xy'}=\frac{1}{2x}\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

【補足 1】$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ より $y=(2-\sqrt{x})^2$ と陰関数が具体的に表される．実はこれを用いた方が簡単になる．

【補足 2】曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ を原点回りに 45° 回転させると, この曲線が放物線であることがわかる (確認せよ).

(4)　$0=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}-\frac{(y'x-y)/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{(y-x)y'+(x+y)}{x^2+y^2} \qquad \therefore y'(x)=\frac{x+y}{x-y}$$

特に，$y'(1)=1$ から，点 $(1,0)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(1)(x-1)=x-1$

そして，$0=(x-y)y'-(x+y)$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=(1-y')y'+(x-y)y''-(1+y')=(x-y)y''-(y')^2-1 \quad \therefore y''(x)=\frac{(y')^2+1}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

【補足】上の結果より $f(x,y)=0$ は同次形の微分方程式 $y'=\dfrac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$ の特殊解であることがわかる．また，曲線 $f(x,y)=0$ は原点に関して対称であり，極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を使うと $x>0$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ においては $r=e^{\theta}$ (あるいは $\theta=\log r$) と簡潔に表示される．なお，極座標表示で $r=ae^{b\theta}$ $(a>0, b\neq 0$ は定数) と表される曲線は対数螺線 (あるいは Bernoulli の螺線) と呼ばれる．

(5)　$0=xe^y-y+1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=e^y+xe^yy'-y' \quad \therefore y'(x)=\frac{e^y}{1-xe^y}$$

特に，$y'(-1)=\dfrac{1}{2}$ なので，点 $(-1,0)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(-1)(x+1)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

そして，$0=(1-xe^y)y'-e^y$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=-(e^y+xe^yy')y'+(1-xe^y)y''-e^yy'=(1-xe^y)y''-e^y\{2y'+x(y')^2\}$$

$$\therefore y''(x)=\frac{e^y\{2y'+x(y')^2\}}{1-xe^y}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$$

$\boxed{2}$ (1) 陰関数 $y(x)$ が極値をとる点では $y'=0$ より $y=2x$ で，これを $f(x,y)=0$ に代入して，$2x^2-1=0$ から，$x=\pm 1/\sqrt{2}$ を得る．このとき，$y''(\pm 1/\sqrt{2})=\mp 2\sqrt{2} \lesseqgtr 0$ (複号同順) なので，$y(x)$ は $x=-1/\sqrt{2}$ で極小値 $-\sqrt{2}$ をとり，$x=1/\sqrt{2}$ で極大値 $\sqrt{2}$ をとる．しかし，これらが y 座標の最小値や最大値であるか否かは上の議論ではわからない．そこで $y(x)$ の具体的な形を用いる．$f(x,y)=(y-x)^2+x^2-1$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$ で，$-\sqrt{2} \leqq x-\sqrt{1-x^2} \leqq y(x) \leqq x+\sqrt{1-x^2} \leqq \sqrt{2}$ は容易であろう．よって，$y(x)$ の極小値および最小値は $y(-1/\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ で，$y(x)$ の極大値および最大値は $y(1/\sqrt{2})=\sqrt{2}$. ($x=\cos\theta, y-x=\sin\theta$ としてもよい.)
(2) $x \geqq 0, \sqrt{x} \leqq 2$ より，$0 \leqq x \leqq 4$ で，$y'(x) \leqq 0$ から，$y(x)$ は単調減少なので，y 座標の最大値は $y(0)=4$，最小値は $y(4)=0$ である．また，$0<x<4$ では $y'(x)<0$ なので，平均値の定理（教科書の定理 2.2.3）から，$y(x)$ の極大値は $y(0)=4$，極小値は $y(4)=0$ がわかる．(なお，$y=(2-\sqrt{x})^2$ で考えれば微分法は使わずに済む.)
(4) 陰関数 $y(x)$ が極値をとる点では $\dfrac{x+y}{x-y}=y'=0$ より $y=-x$ である．これを $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)=0$ に代入して，$\log(\sqrt{2}\,|x|)=\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$ を得る．よって，$y(x)$ の極値を与える点 (候補) は $(x,y)=\left(\pm\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$. これらの点で $y''=\pm\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} \gtrless 0$ (複号同順) であるから，$y(x)$ は $x=-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極大値 $\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとり，$x=\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとる．さらに極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を用いると，y 座標の最大値も最小値もないことも（グラフでなく，θ で表した $y'(x)$ の符号を調べることで）わかるが割愛する．(勿論，$y'(x)=(x+y)/(x-y)$ より，$y'(x)>0$ は $-|x|<y<|x|$ なので，$y(x)$ は領域 $y^2<x^2$ で単調増加し，領域 $y^2>x^2$ で単調減少するのはよい.)
(5) $x=(y-1)e^{-y}$ と変形できるので，$y(x)$ は極値をとらず，最大値も最小値も存在しないことは容易に知られる．実際，y の関数 $x=(y-1)e^{-y}$ の増減を調べれば，$y(x)$ は $x \leqq e^{-2}, y \leqq 2$ の範囲と，$0<x \leqq e^{-2}, y \geqq 2$ の範囲でそれぞれ一意に定まり，$y'(x)>0$ $(x<e^{-2}, y<2)$, $y'(x)<0$ $(0<x<e^{-2}, y>2)$ となることがわかる．さらに，$\displaystyle\lim_{y\to-\infty} x(y)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{y\to\infty} x'(y)=\lim_{y\to\infty}(2-y)e^{-y}=0$ なので，$y(x)$ は $x \leqq e^{-2}$ で定義され，上に有界でなく，下に有界でもない．特に $y(x)$ は極値をとらず，最大値も最小値も存在しない．(以上のように $y'(x)$ が x, y の式で書けると，$y(x)$ の極値を求める事には有用でも，肝心な最大値や最小値の存在を調べるには別の考察を要する場合が多い.)
$\boxed{3}$ (1) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく。連立方程式 $F_x=y-2x\lambda=0$, $F_y=x-2y\lambda=0$, $F_\lambda=-(x^2+y^2-1)=0$ を解くと，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$(複合同順), $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$(複合同順)．これが極値の候補になる。$g_y=2y$ より $g_y(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\pm\sqrt{2}\neq 0$ である事に注意し，$g(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\phi(x)$ をとる。このとき，$g(x,\phi(x))=0$ を x で微分すると $2x+2\phi\phi'=0$. さらに x で微分して $2+2\phi'^2+2\phi\phi''=0$. よって、$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき，$\phi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$, $\phi''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$. 他方, $h(x)=f(x,\phi(x))=x\phi(x)$ は $h'(x)=\phi(x)+x\phi'(x)$, $h''(x)=2\phi'(x)+x\phi''(x)$. よって $h'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=0$, $h''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{7}{2}$. 同様に $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき，$h'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=0$, $h''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{7}{2}$. まとめると、$g(x,y)=0$ のもとで，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ で極大値（最大値）$\frac{1}{2}$，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ で極小値（最小値）$-\frac{1}{2}$ をとる．

(3) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(x,y)=xy-\lambda(3x^2-2xy+3y^2-24)$ とおく。連立方程式 $F_x=y-\lambda(6x-2y)=0$, $F_y=x-\lambda(-2x+6y)=0$, $F_\lambda=-(3x^2-2xy+3y^2-24)=0$ を解くと $(x,y)=(\pm\sqrt{6},\pm\sqrt{6})$(複合同順),$(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$(複合同順)．これが極値の候補になる．$g_y=-2x+6y$ より $g_y(\pm\sqrt{6},\pm\sqrt{6})=\pm 4\sqrt{6}\neq 0$, $g_y(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})=\mp 8\sqrt{3}\neq 0$ である事に注意し，$g(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\phi(x)$ をとる．このとき，$g(x,\phi(x))=0$ を x で微分すると $6x-2\phi-2x\phi'+6\phi\phi'=0$. さらに x で微分して $6-4\phi'-2x\phi''+6(\phi')^2+6\phi\phi''=0$. よって $\phi'(\pm\sqrt{6})=-1$, $\phi''(\pm\sqrt{6})=\mp\frac{4}{\sqrt{6}}$, $\phi'(\pm\sqrt{3})=1$, $\phi''(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 他方, $h(x)=f(x,\phi(x))=x\phi(x)$ は $h'(x)=\phi(x)+x\phi'(x)$ $h''(x)=2\phi'(x)+x\phi''(x)$. よって，$h'(\pm\sqrt{6})=0$, $h''(\pm\sqrt{6})=-6$, $h'(\pm\sqrt{3})=0$, $h''(\pm\sqrt{3})=3$. まとめると、$g(x,y)=0$ のもとで，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm\sqrt{6},\pm\sqrt{6})$ で極大値（最大値）6，$(x,y)=(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$ で極小値（最小値）-3 をとる．

(6) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^3+y^3-\lambda(x^2+y^2-2)$ とおく．連立方程式 $F_x=3x^2-2x\lambda=0$, $F_y=3y^2-2y\lambda=0$, $F_\lambda=-(x^2+y^2-2)=0$ を解くと $(x,y)=(0,\pm\sqrt{2})$,$(\pm\sqrt{2},0)$,$(\pm 1,\pm 1)$(複合同順)．これが極値の候補になる．$g_y=2y$ より $g_y(0,\pm\sqrt{2})=\pm 2\sqrt{2}\neq 0$, $g_y(\pm 1,\pm 1)=\pm 2\neq 0$, $g_x=2x$ より $g_x(\pm\sqrt{2},0)=\pm 2\sqrt{2}\neq 0$ である事に注意し $g(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\phi(x)$,$x=\psi(y)$ をとる．このとき，$g(x,\phi(x))=0$ を x で微分すると $2x+2\phi\phi'=0$. さらに x で微分して $2+2(\phi')^2+2\phi\phi''=0$. よって、$\phi'(0)=0$, $\phi''(0)=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi'(\pm 1)=-1$, $\phi''(\pm 1)=\mp 2$. 他方, $h(x)=f(x,\phi(x))=x^3+\phi^3(x)$ は $h'(x)=3x^2+3\phi^2(x)\phi'(x)$, $h''(x)=6x+6\phi(x)(\phi'(x))^2+3\phi^2(x)\phi''(x)$. よって，$h'(0)=0$, $h''(0)=\mp\frac{6}{\sqrt{2}}$, $h'(\pm 1)=0$, $h''(\pm 1)=\pm 6$. 一方, 同様に $k(y)=f(\psi(y),y)$ は $k'(0)=0$, $k''(0)=\mp\frac{6}{\sqrt{2}}$. まとめると、$g(x,y)=0$ のもとで，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,\sqrt{2}),(\sqrt{2},0)$ で極大値（最大値）$2\sqrt{2}$, $(x,y)=(0,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},0)$ で極小値（最小値）$-2\sqrt{2}$，$(x,y)=(1,1)$ で極小値 2, $(x,y)=(-1,-1)$ で極大値 -2, をとる．