# 数学演習第二　(第 9 回)　線形：線形写像, 核と像　解答例　　2016 年 12 月 14 日　実施

$\boxed{1}$　(1) 任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_3+y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)$, $f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_2 \\ kx_1+kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$
が成り立つので, $f$ は線形写像である.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので, $f$ は線形写像ではない.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2,\ f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 8 \neq 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ より, $f$ は線形写像ではない.

(4) 任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $f(p(t)+q(t)) = p'(t)+q'(t) = f(p(t))+f(q(t)),\ \ f(kp(t)) = kp'(t) = kf(p(t))$ が成り立つので, $f$ は線形写像である.

$\boxed{2}$　(1) 一般のベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の一次結合で表す. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $c_1$, $c_2$ について解くと $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & (3x_1-2x_2)/5 \\ 0 & 1 & (-2x_1+3x_2)/5 \end{bmatrix}$ より $c_1 = \dfrac{3x_1-2x_2}{5}$, $c_2 = \dfrac{-2x_1+3x_2}{5}$ を得るので,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{3x_1-2x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \frac{-2x_1+3x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3x_1-2x_2 \\ -2x_1+3x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる.

(2) 同様に $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解いて, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$
より $c_1 = x_1-x_2$, $c_2 = x_2-x_3$, $c_3 = x_3$. したがって

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= f\left((x_1-x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (x_2-x_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + (x_2-x_3)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1-x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (x_2-x_3)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-x_2+x_3 \\ x_1-x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる.

$\boxed{3}$　(1) $(a)$ $\mathrm{Ker}(f)$ は, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるようなベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^3$ の部分空間, すなわち連立方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解空間である. $A$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, その解は, 任意の値をとるパラメータ $c$ を用いて $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$

の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

$(b)$ $\mathrm{Im}(f)$ は, ベクトル $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^2$ の部分空間である. $x_1$, $x_2$, $x_3$ は任意の値をとることから, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるため, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は, この 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい. ここで, この 3 つのベクトルを列に並べた行列は $A$ に他ならず, $A$ の簡約行列の主成分は 1 列と 3 列にあるので, 3 つのベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組, すなわち $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を $\mathrm{Im}(f)$ の基底として選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

$(c)$ 一般に, 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して, $f$ が 1 対 1 写像 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, および $f$ が上への写像 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = m$ である. よって, $f$ は上への写像だが 1 対 1 写像ではない.

(2) $(a)$ $A$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, 任意の値をとるパラメータ $c$ を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

$(b)$ $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, $A$ の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

$(c)$ $f$ は 1 対 1 写像でも上への写像でもない.

(3) $(a)$ $A$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ, すなわち, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ で, 基底は無く, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ である.

$(b)$ $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, $A$ の簡約行列の主成分がすべての列にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ となる.

$(c)$ $f$ は 1 対 1 写像かつ上への写像である.

$\boxed{4}$ (1) 任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $D(p(t) + q(t)) = \{p'(t) + q'(t)\} - \frac{1+t}{2}\{p''(t) + q''(t)\} = p'(t) - \frac{1+t}{2}p''(t) + q'(t) - \frac{1+t}{2}q''(t) = D(p(t)) + D(q(t))$, $D(kp(t)) = kp'(t) - \frac{1+t}{2}kp''(t) = k\{p'(t) - \frac{1+t}{2}p''(t)\} = kD(p(t))$ が成り立つので, $D$ は線形写像である.

(2) $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと,

$$D(p(t)) = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) - \frac{1+t}{2}(2a_2 + 6a_3 t) = (a_1 - a_2) + (a_2 - 3a_3)t$$

となるので, $\mathrm{Ker}(D) \ni p(t)$ となるためには, $D(p(t)) = 0$ すなわち, $a_1 - a_2 = 0,\ a_2 - 3a_3 = 0$ を満たす必要がある. この連立方程式を解いて, $a_0 = c,\ a_1 = 3d,\ a_2 = 3d,\ a_3 = d$ ($c, d$ は任意), すなわち $p(t) = c + d(3t + 3t^2 + t^3)$ を得る. よって, $\mathrm{Ker}(D) = \langle 1, 3t + 3t^2 + t^3 \rangle$. ここで, 1 と $3t + 3t^2 + t^3$ は一次独立なので, $\mathrm{Ker}(D)$ の基底として $(1, 3t + 3t^2 + t^3)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 2$ である.

(3) $\mathbb{R}[t]_3$ の基底として $(1, t, t^2, t^3)$ を取ると,

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1, \quad D(t^2) = -1 + t, \quad D(t^3) = -3t$$

であることから, $\mathrm{Im}(D) = \langle 0, 1, -1 + t, -3t \rangle$. ここで, $-1 + t = (-1) \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot (-3t)$ と表せて, 1 と $-3t$ は一次独立なので, $\mathrm{Im}(D)$ の基底として $(1, -3t)$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(D)) = 2$ である. 基底の取り方は, $(1, -1 + t)$, $(-1 + t, -3t)$, $(1, t)$ などでもよい.