数学演習第二　(第9回)

線形：線形写像, 核と像

2016 年 12 月 14 日

$\boxed{1}$ 次の写像は線形写像になるか. 線形写像である場合にはそれを示し, 線形写像でない場合にはその理由を述べよ.

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$　(**演習書問題 12.1.1(3)**)

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$　(**演習書問題 12.1.1(4)**)

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照)

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ.　(**演習書問題 12.1.2(2), (3)**)

(1) $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき, おのおのの A が決める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問に答えよ.　(**演習書問題 12.2.4**)

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (3)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) $\mathrm{Ker}(f)$ の基底および次元を求めよ. ($\{\mathbf{0}\}$ の場合, 基底は無し, 次元は 0 であることに注意せよ.)

(b) $\mathrm{Im}(f)$ の基底および次元を求めよ.

(c) f は上への写像 (全射) であるか, また 1 対 1 写像 (単射) であるか.

$\boxed{4}$ 写像 $D : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照) を $D(p(t)) = p'(t) - \frac{1+t}{2}p''(t)$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) D が線形写像であることを示せ.

(2) $\mathrm{Ker}(D)$ の基底および次元を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}(D)$ の基底および次元を求めよ.

$\mathbb{R}[t]_n = \{\, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\}$ (n 次以下の実係数 1 変数多項式全体) は, 基底として $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ が取れるような, $n+1$ 次元ベクトル空間である.