平成 28 年度 数学演習第二 期末統一試験 問題用紙

2017 年 2 月 1 日実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと.
・簡潔な解答になるよう努めること. 不十分と判断された解答には得点を与えない.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2 変数関数 $g(x,y)=x^3+y^3-6xy$ に対して，$g(x,y)=0$ 上の点 $(3,3)$ のまわりで定義された C^2 級の陰関数を $y=\varphi(x)$ とする.

(1) $\varphi'(x)$ を x, y の式で表せ.

(2) 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $(3,3)$ における接線の傾きの値を求めよ.

(3) 点 $(3,3)$ における $\varphi''(x)$ の値を求めよ.

(4) $f(x,y)=xy$ $(x>0)$ とする. このとき，$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を求めよ. 解答は「点 (a,b) において極大値 c をとる」あるいは「点 (a,b) において極小値 c をとる」という形式で述べること.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の重積分の値を求めよ.

(5) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq x$

(6) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\quad D : x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ x^2+y^2 \leqq 1$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 積分順序の交換に関する次の問いに答えよ.

(7) 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\tan x} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換すると $\displaystyle\int_{\boxed{\text{あ}}}^{\boxed{\text{い}}} dy \int_{\boxed{\text{う}}}^{\boxed{\text{え}}} f(x,y)\,dx$ となる. $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{え}}$ にあてはまる数値や式を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(8) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx$ の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の重積分の値を求めよ.

(9) $\displaystyle\iint_D (x+y)\sin(x-y)\,dxdy,\quad D : 0 \leqq x+y \leqq 1,\ \ 0 \leqq x-y \leqq \pi$

(10) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}y\,dxdy,\quad D : y \geqq 0,\ \ x^2+y^2 \leqq x$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -a-2 \end{bmatrix}$ (a は実数) に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(11) $a \neq 1$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ (成分がすべて整数になるものを答えること)．

(12) $a \neq 1$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(13) $a = 1$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ (成分がすべて整数になるものを答えること)．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ は

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

をみたすとする．このとき，$\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であり，$\mathcal{B} = (f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2))$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．次の問いに答えよ．

(14) $f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．

(15) $\mathbb{R}^2$ における標準基底から基底 $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(16) f の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ．

(17) f の標準基底に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ に関する次の問いに答えよ．

(18) A の固有値をすべて求めよ．

(19) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．ただし，成分がすべて整数になるものを答えること．

(20) 自然数 n に対して，$A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を求めよ．