第 1 回 微積：逆三角関数，極限値

2017 年 4 月 26 日実施分

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(a\cdot\frac{\sin ax}{ax}-b\cdot\frac{\sin bx}{bx}\Big)=a-b.$

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおけば，$x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y-1)(\cos y+1)}{y(\cos y+1)}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin^2 y}{y(\cos y+1)}=\lim_{y\to 0}\Big(\frac{\sin y}{y}\Big)^2\frac{-y}{\cos y+1}=0.$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

【別法】(6), (7) では $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ を用いる方法も有効.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ に注意して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\cdot\cos x\Big)=\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=1.\quad (y=\sin x\ \text{とおいた})$$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log a)x}-1}{(\log a)x}\cdot\log a=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\log a=\log a$ $(y=(\log a)x$ とおいた$)$ なので，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}}=\frac{1}{\log 3-\log 2}\Big(=\frac{1}{\log(3/2)}\Big).$ **【別法】** $\displaystyle\frac{x}{3^x-2^x}=\frac{1}{2^x}\frac{x}{(3/2)^x-1}.$

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおけば $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to +0$ であるから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\tan x=\lim_{y\to +0}y\tan\Big(\frac{\pi}{2}-y\Big)=\lim_{y\to +0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

(12) 自然対数をとって考える． $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})=-\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=-\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=-1$ $(y=x-1$ とおいた$)$． $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log(x^{\frac{1}{1-x}})}$ であるから， $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim_{x\to 1}\log(x^{\frac{1}{1-x}})}=e^{-1}\Big(=\frac{1}{e}\Big).$

(13) 自然対数をとって考える． $\displaystyle\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\frac{\log(\cos x)}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}$ であるから，(7), (12) の計算を用いて，

$$\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\quad (y=\cos x\ \text{とおいた})$$

よって，(12) と同様に， $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}\Big(=\frac{1}{\sqrt{e}}\Big).$

【注意】一般に，$b=\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し，$g(y)$ が b で連続なら，$\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))=g(b)$ が成り立つ (連続性の定義にほかならない)．(12), (13) の解答例ではこの事実 (e^x の連続性) を用いている．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば，$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおけば，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

(3) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$ とおけば，$\sin\theta = \sin\dfrac{3\pi}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta = \pi - \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$.

(4) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\tan\dfrac{4\pi}{7}\right)$ とおけば，$\tan\theta = \tan\dfrac{4\pi}{7}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから　$\theta = \dfrac{4\pi}{7} - \pi = -\dfrac{3\pi}{7}$.

(5) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば，$\tan\alpha = -2\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で，$\sin\big(\mathrm{Tan}^{-1}(-2)\big) = \sin\alpha$. このとき，
$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 5$ より $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ となり，$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{4}{5}$. $\tan\alpha < 0$ より
$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ となるので, $\sin\alpha < 0$ となり，求める値は $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

【別法】 $\cos\alpha > 0$ より　$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ を用いて　$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

(6) $\alpha = \mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ とおけば，$\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}\ (0 \leq \alpha \leq \pi)$ で，$\tan\left(\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \tan\alpha$. このとき，
$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 9$　より　$\tan^2\alpha = 8$. $\cos\alpha < 0$ より $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ となるので，$\tan\alpha < 0$ となり，求める値は $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$.

【別法】 $\sin\alpha \geq 0$ より $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ を用いて　$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $x = \cos\big(\mathrm{Tan}^{-1} 2\big)$ と変形できる．ここで $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} 2$ とおけば，$\tan\alpha = 2\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 5$　より　$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$. $\cos\alpha > 0$ に注意して，$x = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right) = \cos\left(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}\right)$ と変形できる．ここで $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおけば,
$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$x = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{7}{8}$.

(3) $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる．$\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおけば，$\tan\alpha = \dfrac{1}{3}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
このとき，$x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$. また，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{3}{4}$.
よって, $x = \dfrac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{7}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおけば, $\sin\theta = x\ (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$. このとき, $x = \sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ かつ $0 \leq \pi/2 - \theta \leq \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により　$\pi/2 - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって，$\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + (\pi/2 - \theta) = \pi/2$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおけば，$\tan\theta = x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で，$\sin(\mathrm{Tan}^{-1} x) = \sin\theta$. このとき，
$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + x^2}$，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \dfrac{x}{1 + x^2}$. $\tan\theta, \sin\theta$ が同符号 (0 になる場合も同時) であることに注意して, $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ が得られる (これが示すべき式).

【別法】 $\cos\theta > 0$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を用いて　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$，$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.