数学演習第一（演習第２回）

線形：平面の方程式，行列の演算　2017 年 5 月 10 日

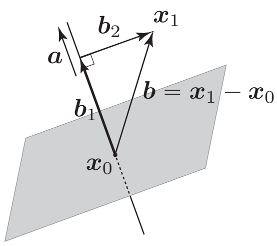
1 (1) この平面は $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\right)=0$ と表される．これを整理して，$\boxed{x-2y+3z=-5}$.

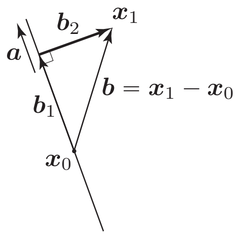
(2) この直線は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ と表される．これより t を消去して $\boxed{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=z+1}$. 次に, 直線上の点は $(2t+1,-3t+2,t-1)$ と書けるので, 平面との交点において $(2t+1)-2(-3t+2)+3(t-1)=-5$. これより $t=\dfrac{1}{11}$ が得られ, 交点の座標は $\boxed{\left(\dfrac{13}{11},\dfrac{19}{11},-\dfrac{10}{11}\right)}$.

(3) $\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとって, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=c\|\boldsymbol{a}\|^2$. これより $c=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ であるから, $\boldsymbol{b}_1=\boxed{\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{b}_2=\boxed{\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}}$. 更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|=\boxed{\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}}$, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}}$ ($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}$ が直角三角形をなすことに注意). 《補足》外積を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と表すこともできる.

(4) ① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と 1 の平面との距離は (3) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ ($\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影の長さ) $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ に等しい (下左図). 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 求める距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と 2 の直線との距離は (3) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に他ならない (下右図). よって, その値は $\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|^2-|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}\left(=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\right)$.





2 (1) $-A=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&0\\-1&1\end{bmatrix}$, (2) $2A+3B=\begin{bmatrix}4&6\\-2&0\\2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&3\\0&6\\6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\-2&6\\8&7\end{bmatrix}$,

(2) $X=\dfrac{1}{2}(4B-3A)=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}-4&4\\0&8\\8&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&9\\-3&0\\3&-3\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}-5&-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{15}{2}\end{bmatrix}$

3 (1) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot1+3\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$ (-2 と答えてもよい).

(2) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$. (3) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}$.

(4) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5\\4&3\\-2&6\end{bmatrix}$. (5) $AB=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5&3\\4&3&4\\-2&6&3\end{bmatrix}$.

4 演習書の解答参照.

$\boxed{5}$ ${}^{\mathrm{t}}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, ${}^{\mathrm{t}}B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 39 & 30 \\ 33 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 33 \\ 30 & 33 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$,

${}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B = {}^{\mathrm{t}}(BA) = {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 21 & 24 & 66 \\ 17 & 28 & 68 \\ 5 & 10 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 17 & 5 \\ 24 & 28 & 10 \\ 66 & 68 & 23 \end{bmatrix}$. ($\boxed{4}$ で AB, BA を計算した)

$\boxed{6}$ (1) $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ となることは容易に分かる．

① $ad-bc \neq 0$ ならば, 上の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り, $A\Big(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\Big) = \Big(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\Big)A = E$. よって, $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ が A の逆行列である．

② $ad-bc = 0$ ならば $A\widetilde{A} = O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\widetilde{A} = (A^{-1}A)\widetilde{A} = A^{-1}(A\widetilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A = O$ が従う (成分に注目). ところが, $A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する．

(2) ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

② $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{23} \\ \frac{3}{23} \end{bmatrix}$.

$\boxed{7}$ (1) $A\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_1$ より, $\lambda_1 = 1$. $A\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} =$ $2\boldsymbol{p}_2$ より, $\lambda_2 = 2$. $A\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{p}_3$ より, $\lambda_3 = -1$.

(2) $A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1 + 0\boldsymbol{p}_2 + 0\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\boldsymbol{p}_2 = 0\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2 + 0\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$A\boldsymbol{p}_3 = 0\boldsymbol{p}_1 + 0\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって,

$$AP = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & A\boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より, B として $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ がとれる. (実は, P は正則であり, $B = P^{-1}AP$ が成り立つ.)

$\boxed{8}$ (1) $(x', y') = (x, -y)$ より, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. すなわち, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad \text{すなわち,}\ Q_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta\Big(R\Big(Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big)\Big) = Q_\theta R Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$\begin{aligned} R_\theta = Q_\theta R Q_{-\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$