数学演習第一（演習第２回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2017 年 5 月 10 日

1 【空間内の直線と平面の問題】 (以下では, 点 (x_0, y_0, z_0) とその位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を同一視する)

① 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を法線ベクトルとする平面 ($\boldsymbol{a}$ と垂直な平面) の方程式は

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}.$$

(右の表現は通常 $ax+by+cz+d=0$ または $ax+by+cz=e$ の形に整理する.)

② 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(a, b, c)$ を方向ベクトルとする直線 ($\boldsymbol{a}$ と平行な直線) の方程式は

$$\underset{(t:\text{媒介変数})}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}\right) \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}.$$

(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0, \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ となる.)

(1) 点 $(3, 1, -2)$ を通り, $\boldsymbol{a} = {}^t(1, -2, 3)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 0)$ を通る直線の方程式を求めよ. 更に, この直線と (1) の平面の交点を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ ($\boldsymbol{b}_1 = c\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{a} = 0$) の形に分解せよ ($\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影と呼ぶ). 更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(4) ① 点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(x_1, y_1, z_1)$ と上の ① の平面の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ (平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$) で与えられることを示せ (ヒント: $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影の長さに注目せよ).

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と上の ② の直線との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|^2 - |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられることを示せ.

2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ: (1) $-A$, (2) $2A+3B$, (3) $2X+3A=4B$ を満たす行列 X.

3 次の行列 A, B に対し, 積 AB を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. (5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4 (演習書) 問題 8.1.1 (1), (2), (3), (4) の行列 A, B に対し, 積 AB, BA が定義されるなら計算せよ.

5 (演習書) 問題 8.1.1 (3) の行列 A, B に対して, 転置行列 ${}^tA, {}^tB, {}^t(AB)$ を求めよ. 更に, 積 ${}^tB\,{}^tA$, ${}^tA\,{}^tB$ を求めよ.

6 (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおく. このとき, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ となることを確認し, 次の主張を示せ.

① $ad-bc \neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$. ② $ad-bc = 0$ ならば, A は正則でない.

(2) 上の事実を用いて, ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ. ② 連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を解け.

7 行列 $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2 = \lambda_2\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = \lambda_3\boldsymbol{p}_3$ となる実数 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ.

(2) 3 次の正方行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ と列ベクトル分割によって与えられているとする. このとき, $AP = PB$ となる 3 次正方行列 B を (1 つ) 答えよ.

8 次を満たす 2 次正方行列 R, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, この 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに角 θ だけ回転移動した点を (x', y') とする. これを複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy)$ と書ける. このとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(3) x 軸を原点の周りに角 θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする. 点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.