数学演習第一（演習 第 3 回） 微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等

2017 年 5 月 17 日 実施

1 次の関数の導関数を求めよ．(a は $0 < a \neq 1$ なる定数)

(1) $f(x) = \log(\log(\log x))$　　(2) $f(x) = a^{x^2+2x}$ [3.1.6 (5)]

(3) $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$　　(4) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4}$ [3.1.2 (5)]

(5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ [3.1.2 (7)]　　(6) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ [3.1.5 (2)]

2 関数 f の逆関数 f^{-1} が存在し, ともに微分可能であるとする (成立条件については微積教科書 p.29 参照). このとき, $y = f^{-1}(x)$ とおけば, $x = f(y)\ \bigl(= f(f^{-1}(x))\bigr)$ であるから, 両辺を x で微分して $1 = f'(y)\{f^{-1}(x)\}'$ (合成関数の微分). よって, $y = f^{-1}(x)$ の導関数が

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \left(\text{あるいは } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)$$

で与えられる．この考え方 (公式) により, 次の逆三角関数の導関数を計算せよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$　　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\, x$　　(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$

3 次の関数の導関数を求めよ．(a は $a > 0$ なる定数)

(1) $f(x) = \bigl(\mathrm{Sin}^{-1}\, x\bigr)^2$ [3.1.4 (2)]　　(2) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{1-x}$ [3.1.4 (4)]

(3) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}\, x}{1+x^2}$ [3.1.4 (1)]　　(4) $f(x) = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$

(5) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\, x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$　　(6) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}(2x-1) + 2\,\mathrm{Cos}^{-1}(\sqrt{x})$

(7) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{a}$

4 次の関数の逆関数の導関数を求めよ．

(1) $y = \sinh x \left(= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$　　(2) $y = \tanh x \left(= \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$

関数の定義域に関する注意 （定義域が $\mathbb{R}$ の部分集合の場合）

- 特に指定のない限り, 定義域は許される最も広い範囲で考える．定義域の内部で微分可能でもしばしば端点で微分可能性が失われる．例えば, $\mathrm{Sin}^{-1}\, x$ は $-1 \leq x \leq 1$ で定義され, $-1 < x < 1$ で微分可能.
- $f(x), p(x)$ が連続関数で, $p(x)$ が '有理数の値をとる定数関数' 以外のとき, 関数 $f(x)^{p(x)}$ は, 通常, 底 $f(x) > 0$ の範囲で考え, $f(x)^{p(x)} = e^{p(x)\log f(x)}$ となる ($p(x)$ が正値なら極限をとって $f(x) \geq 0$ の範囲で考えることもできる)．例えば, $(\sin x)^{\cos x}$ の定義域は $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (2n\pi, (2n{+}1)\pi)$ となる．
- $f(x)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{f(x)}\,)^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$ は互いに素) の定義域は, n が奇数のとき $f(x)$ の定義域と一致し, n が偶数のとき $f(x) \geq 0$ の範囲となる．($f(x)^{-\frac{m}{n}}$ であれば更に $f(x) \neq 0$ が制限として加わる.)