第 4 回 線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2017 年 5 月 24 日

$\boxed{1}$ (1) 第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にある. 第 1 行と第 2 行を交換して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行と第 2 行の主成分が 1 でない. 第 1 行と第 2 行をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行の主成分が第 3 列にあるが, 第 3 列には他にも 0 でない成分がある. 第 1 行に第 2 行の 2 倍を, 第 3 行に第 2 行の -1 倍をそれぞれ加えて, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ $$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times①]{②-4\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{6}\times③]{-\frac{1}{3}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を囲んで示しておく. 主成分の個数が階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

(1) $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-3\times①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix}.$$
階数は 2.

(2) $$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times②]{①-②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
階数は 2.

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \\ 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-①}]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \\ 0 & 14 & 78 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-3\times② \\ ④-7\times②}]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-③ \\ ④-6\times③}]{①+\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}\times③]{\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
階数は 3.

(4) $$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-2\times③ \\ ④-3\times③}]{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-①}]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{③+3\times② \\ ④+3\times②}]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-③ \\ ④+③}]{①+3\times③} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ 階数は 3.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 型. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B = P_{12}(-5)A$. 従って, $M = P_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 型. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{13}P_3(2)A$. 従って,
$$M = P_{13}P_3(2) = P_{13}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 型．$A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{③+(-3)\times②} B$ なので，

$B = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$．従って，

$$M = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5) = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= P_{32}(-3)P_{14}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = P_{32}(-3)\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\-6&-3&1&-15\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ 階数が判った時点で計算を終了してもよい (簡約行列まで求める必要はない)．

(1) $\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[③-a\times①]{②-①} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{bmatrix}$.

- $a=1$ のとき，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，階数は 1 である．
- $a\neq 1$ のとき，$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{1-a}\times③]{\frac{1}{a-1}\times①} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&1&a+1\end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{bmatrix}$ より，$a=-2$ ならば階数は 2 であり，$a\neq -2$ ならば階数は 3 である．

以上より，

$$\begin{cases} a=1 \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 1,\\ a=-2 \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 2,\\ a\neq 1 \text{ かつ } a\neq -2 \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 3. \end{cases}$$

(2) $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix} \xrightarrow[③-a^2\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{bmatrix}$.

- $a=b$ のとき，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&c^2-a^2\end{bmatrix}$．従って，$c=a$ ならば $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，階数は 1 である．一方，$c\neq a$ ならば $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&c^2-a^2\end{bmatrix} \xrightarrow{③-(c+a)\times②} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，階数は 2 である．
- $a\neq b$ のとき，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{bmatrix} \xrightarrow{③-(b+a)\times②} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&0&(c-b)(c-a)\end{bmatrix}$．従って，$b=c$ または $c=a$ ならば階数は 2 であり，$b\neq c$ かつ $c\neq a$ ならば階数は 3 である．

以上より，a, b, c が全て一致するならば階数は 1，いずれか二つが一致し，もう一つが異なるならば階数は 2，全て異なれば階数は 3 となる．

(3)
- $a\neq 0$ のとき，$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \xrightarrow{②-\frac{c}{a}\times①} \begin{bmatrix}a&b\\0&\frac{ad-bc}{a}\end{bmatrix}$ より，$ad-bc=0$ ならば階数は 1 であり，$ad-bc\neq 0$ ならば階数は 2 である．
- $c\neq 0$ のとき，$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix} \xrightarrow{②-\frac{a}{c}\times①} \begin{bmatrix}c&d\\0&-\frac{ad-bc}{c}\end{bmatrix}$．従って，この場合も，$ad-bc=0$ ならば階数は 1 であり，$ad-bc\neq 0$ ならば階数は 2 である．
- $a=c=0$ のとき ($ad-bc=0$ であることに注意)，$\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}$ より，$b=d=0$ ならば階数は 0 であり，$b\neq 0$ または $d\neq 0$ ならば $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ と変形できるので階数は 1 である．

以上より，

$$\begin{cases} (a,b,c,d)=(0,0,0,0) \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 0,\\ (a,b,c,d)\neq(0,0,0,0) \text{ かつ } ad-bc=0 \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 1,\\ ad-bc\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{階数は } 2. \end{cases}$$