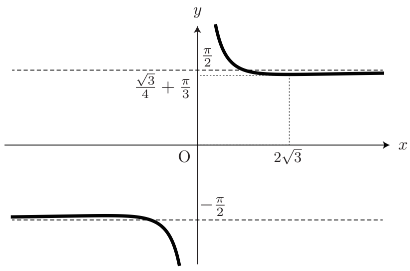
# 数学演習第一（第 5 回）微積：極値，関数の増減, ロピタルの定理　解答例

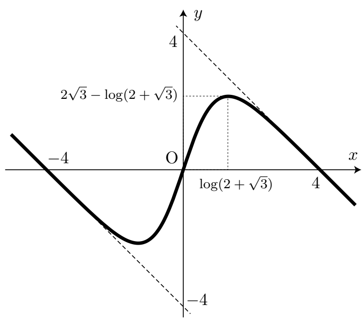
2017 年 5 月 31 日 実施分

$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$ で，$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \infty$．さらに，$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ で，$f(x)$ が奇関数であることにも注意する．$f'(x) = -\dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1/2}{1+(x/2)^2} = \dfrac{(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{2x^2(x^2+4)}$ より，$f(x)$ の増減は下表に従い，極大値 $f(-2\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{4\sqrt{3}} + \mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{3}$，極小値 $f(2\sqrt{3}) = \dfrac{3}{4\sqrt{3}} + \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{3}$．

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-2\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-0$ | $+0$ | $\cdots$ | $2\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| $f(x)$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |




(2) $f(x) = 4\tanh x - x = \dfrac{4(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} - x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$ で奇関数．
また $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$ だから $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{f(x) - (\pm 4 - x)\} = 0$ である．
このことは $x \to \pm\infty$ のとき $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = \pm 4 - x$ (複号同順) に 漸近する ことを意味する．増減については，$f(x)$ が奇関数だから $x \geqq 0$ の範囲で調べればよい．$f'(x) = \dfrac{4}{\cosh^2 x} - 1 = 0$ とすると $\cosh^2 x = 4$. すべての実数 $x$ に対して $\cosh x \geqq 1$ だから，$\cosh x = 2$ すなわち $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$. ここで，$t = e^x$ とすると $t^2 - 4t + 1 = 0$ と整理される．$x \geqq 0$ ($\Leftrightarrow$ $t \geqq 1$) の範囲で調べているので, $t = 2+\sqrt{3}$ がわかる．これは $x = \log(2+\sqrt{3})$ に対応し，この値を境に $f'(x)$ の符号は正から負に変化する．極大値を求めるときは $t = e^x = 2+\sqrt{3}$ と $t^{-1} = 2-\sqrt{3}$ を用いて，極大値 $f(\log(2+\sqrt{3})) = 4\left.\dfrac{t-t^{-1}}{t+t^{-1}}\right|_{t=2+\sqrt{3}} - \log(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3})$. 奇関数だから極小値は $f(-\log(2+\sqrt{3})) = -2\sqrt{3} + \log(2+\sqrt{3})$.




| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-\log(2+\sqrt{3})$ | $\cdots$ | $\log(2+\sqrt{3})$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | $-\infty$ |

$\boxed{2}$ 以下の解答 ($\boxed{3}$ も含めて) では, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で示した．また, $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$ が存在すれば $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$ が成り立つという事実も計算を軽減してくれる (用いた箇所を $\overset{\diamond}{=}$ で示した).

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2^{\sin x}(\log 2)\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\sin x}(\log 2)\sin x = 2\log 2$.

【別解】$z = \sin x - 1$ とおけば，(与式) $= \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2^{1+z} - 2}{\log(1+z)} = 2\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2^z - 1}{z} \cdot \dfrac{z}{\log(1+z)} = 2\log 2$.

(3) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{ax}{\sin ax} \cdot \dfrac{\sin bx}{bx} \cdot \dfrac{\cos ax}{\cos bx} = 1$.

【別解】(与式) $= \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\log(\frac{\sin ax}{ax}) + \log x + \log a}{\log(\frac{\sin bx}{bx}) + \log x + \log b} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1 + \frac{1}{\log x}\{\log(\frac{\sin ax}{ax}) + \log a\}}{1 + \frac{1}{\log x}\{\log(\frac{\sin bx}{bx}) + \log b\}} = 1$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$.

【別解】$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおけば，(与式) $= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \tan\theta \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \lim\limits_{\phi\to +0} \left(\dfrac{\phi}{\sin\phi} \cdot \cos\phi\right) = 1$ ($\phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とした).

(5) $f(x) = x^{\sin x}$ とおけば，$\lim\limits_{x\to +0} \log f(x) = \lim\limits_{x\to +0} \sin x \cdot \log x = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\log x}{1/\sin x} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to +0} (-\tan x) \cdot \dfrac{\sin x}{x} = 0$．よって，$\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} e^{\log f(x)} = e^0 = 1$.

(6) $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおけば，$\lim\limits_{x\to 0} \log f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \dfrac{\log a + \log b}{2} =$

$\log\sqrt{ab}$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\log f(x)} = e^{\log\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

【別解】$y = \dfrac{a^x+b^x}{2} - 1$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\log\frac{a^x+b^x}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right) \stackrel{\diamond}{=} \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right) = \frac{\log a+\log b}{2} = \log\sqrt{ab}$.

$\boxed{3}$ (1) $p>0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^p\log x = \infty$. 一方, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ については, $f(x)$ を分数の形にしてからロピタルの定理を使うと, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^p}} \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{x^p})'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{p}{x^{p+1}}} = -\frac{1}{p}\lim_{x\to+0} x^p = 0$.

(2) $f'(x) = (x^p)'\log x + x^p(\log x)' = x^{p-1}(p\log x+1)$ にある指数 $p-1$ に着目して, $p$ と $1$ との大小によって状況が変わることを察知しよう. まず, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ については, $p \geqq 1$ のとき $p-1 \geqq 0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. 一方, $0<p<1$ のときは, $1-p>0$ に注意して, ロピタルの定理を使うと, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{p\log x+1}{x^{1-p}} \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(p\log x+1)'}{(x^{1-p})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{p}{x}}{(1-p)x^{-p}} = \frac{p}{1-p}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-p}} = 0$. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \begin{cases}\infty & (p\geqq 1)\\ 0 & (0<p<1)\end{cases}$

次に, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ については, $p>1$ のとき $p-1>0$ だから, (1) より $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{p-1}\log x = 0$. 故に, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = 0$. $0<p\leqq 1$ のときは $p-1\leqq 0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{p-1} = \infty\ (0<p<1),\ = 1\ (p=1)$. このことと $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$ を併せると, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to+0} x^{p-1}(p\log x+1) = -\infty$. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq 1)\end{cases}$

(3) $f'(x) = x^{p-1}(p\log x+1)$ は, $\log x = -\dfrac{1}{p}$ 即ち $x = e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $f(x)\ (x>0)$ は $x = e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $f(e^{-\frac{1}{p}}) = (e^{-\frac{1}{p}})^p\log e^{-\frac{1}{p}} = e^{-1}\left(-\dfrac{1}{p}\right) = -\dfrac{1}{pe}$ をとる (増減表は省略).

(4) $g(x) = x^{x^p}$ の底を $e$ に変換すると, $g(x) = e^{\log x^{x^p}} = e^{x^p\log x} = e^{f(x)}$ と表される. したがって, (1) の結果と指数関数の連続性より, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = e^{\lim_{x\to+0} f(x)} = e^0 = 1$ (前者については底を変換するまでもない). 合成関数の微分法より, $g'(x) = e^{f(x)}f'(x) = g(x)f'(x) = x^{x^p}x^{p-1}(p\log x+1) = x^{x^p+p-1}(p\log x+1)$ と表される. このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{x^p+p-1} = \infty$ に注意すると, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = \infty$ が分かる. $\displaystyle\lim_{x\to+0} g'(x)$ については, $\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = 1$ および (2) の結果より, $\displaystyle\lim_{x\to+0} g'(x) = \lim_{x\to+0} g(x)f'(x) = (\lim_{x\to+0} g(x))(\lim_{x\to+0} f'(x)) = \begin{cases}0 & (p>1)\\ -\infty & (0<p\leqq 1)\end{cases}$

$g'(x) = g(x)f'(x)$ において $g(x)>0\ (x>0)$ より, $g'(x)$ も $f'(x)$ と同様に $x = e^{-\frac{1}{p}}$ で負から正に符号変化する. したがって, $g(x)\ (x>0)$ は $x = e^{-\frac{1}{p}}$ で減少から増加に転じ, 極小値 $g(e^{-\frac{1}{p}}) = e^{f(e^{-\frac{1}{p}})} = e^{-\frac{1}{pe}}$ をとる.

【注意】$y = f(x)$ や $y = g(x)$ のグラフを描いておくこと. その際, グラフの形状が, $p>0$ の値に応じて, どのように変遷するか考えよう. 特に, (2) や (4) の解答を参照の上, $p=1$ を境にした $x\to+0$ や $x\to\infty$ での接線の傾きの変化に注意すること. また, 余力ある諸君は, $p<0$ のケースを考察してみよう.

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$.

【注意】$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ の 2 番目の等号はロピタルの定理というより, $e^x$ の基本的性質 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ を用いたと考えた方がよい. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ に直接ロピタルの定理を適用する際に, $e^x - x - 1 = e^x(1-\frac{x+1}{e^x}) \to \infty$ を言おうとすると, あらかじめ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x} = 0$ を示す必要がある (これもロピタルの定理で示せる). 上の解答例はこの部分を回避する方法をとった. しかし, 実は, 分母の絶対値の極限が $\infty$ のときは分子の極限の如何に関わらずロピタルの定理が適応できることが知られており, それを認めるならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$ と解答しても何ら問題はない.

(2) $f(x)$ の導関数は $f'(x) = \dfrac{(e^x-1)x^2 - 2x(e^x-x-1)}{x^4} = \dfrac{e^x(x-2)+(x+2)}{x^3}$. ここで, $g(x) = e^x(x-2)+(x+2)$ とおけば, $g'(x) = e^x(x-2)+e^x+1 = e^x(x-1)+1$, $g''(x) = e^x(x-1)+e^x = xe^x$ であるから, $g''(x)>0\ (x>0)$ かつ $g'(0)=0$. よって, 定理 2.2.5 (微積教科書) より $g'(x)>0\ (x>0)$. 更に, これと $g(0)=0$ により $g(x)>0\ (x>0)$. 従って, $f'(x)>0\ (x>0)$ となり, $f(x)$ は $x>0$ で単調増加である.

【注意】実は, $f(x)$ は $x=0$ での値を $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ と解釈すれば, $\mathbb{R}$ 上で何回でも微分できる関数となる.