数学演習第一 (演習 第 **6** 回)　線形：連立 **1** 次方程式 ［解答例］　**2017** 年 **6** 月 **7** 日 実施

1 (1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x_1 \quad - 4x_3 \quad + x_5 = -3 \\ x_2 + 3x_3 \quad - x_5 = 2 \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 1 \end{cases}$ と簡約化されるので, 主成分に関係しない変数を $x_3=s$, $x_5=t$ (s,t は任意定数) とおいて, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4s-t \\ 2-3s+t \\ s \\ 1-\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

[注] 解の表示に分数が現れないように $x_5=2t$ とおいてもよい ((2) の解答例ではそのようにした).

(2) A の簡約行列は明らかに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x_1 \quad - 4x_3 \quad + x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 \quad - x_5 = 0 \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$ と簡約化される. よって, $x_3=s$, $x_5=2t$ (s,t は任意定数) とおいて, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s-2t \\ -3s+2t \\ s \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

[注] ここで, 解は 1 次独立な<u>2 つ</u>のベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の 1 次結合で表されるので, この 2 つのベクトルを $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解, ベクトルの個数 2 を解の自由度と呼ぶ (線形教科書 pp.53–56 参照).

2 拡大係数行列を行基本変形の繰り返し (掃き出し法) により簡約行列まで変形して, 連立 1 次方程式の解を求める.

8.2.9 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[③-3\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. よって, $x=3$, $y=7$, $z=-3$.

8.2.10 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

主成分に対応しない変数 x_3 を任意定数 t として, 解は $x_1=35+8t,\ x_2=-22-5t,\ x_3=t$.

8.2.10 (2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+2\times①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

主成分に対応しない変数 x_2, x_3 をそれぞれ s, t として, 解は $x_1=3+2s+3t,\ x_2=s,\ x_3=t$.

8.2.10 (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-①\times2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$.

よって, (係数行列の階数) $\neq$ (拡大係数行列の階数) なので, 解なし.

3 (1) 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける. よって,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

勿論, 拡大係数行列を簡約化して解いてもよい.

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-① \\ ③-2\times① \\ ④-①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow④} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -11 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{①-2\times② \\ ③+② \\ ④+2\times②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{①-③ \\ ②-③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\; - 4x_3 \quad = -2 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad = \;\; 5 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = \;\; 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+4t \\ 5-3t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，方程式は $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，

解は $z = t$ とおいて $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数)．よって，基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で，解の自由度は 1．

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，方程式は

$\begin{cases} x_1 \quad + \;\; x_3 + \;\; x_4 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $x_3 = s,\, x_4 = t$ とおいて $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ 2s+2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(s, t は任意定数)．よって，基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で，解の自由度は 2．

5 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & a^2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+1 & 2 \\ 0 & -2 & a^2+2 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-2) & a-2 \end{bmatrix}.$

- $a = 0$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となり，係数行列の階数は 2，拡大係数行列の階数は 3．
- $a = 2$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，係数行列，拡大係数行列ともに階数は 2．
- $a \neq 0, 2$ のとき，係数行列，拡大係数行列ともに階数は 3．

[注] 階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分．(勿論，簡約行列まで求めてもよい．)

(2)
- $a = 0$ のとき，$2 =$ (係数行列の階数) $<$ (拡大係数行列の階数) $= 3$ なので解なし．
- $a = 2$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，解は無数にあり，その解は $x = 5 - 8t$, $y = -2 + 3t,\ z = t$ (t は任意定数)．
- $a \neq 0, 2$ のとき，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-2) & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a(a-2)}\times\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/a+2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

であるから，解はただ 1 つで，$x = -\dfrac{2}{a} + 2,\ y = \dfrac{1}{a} - 1,\ z = \dfrac{1}{a}$．

(3)
- $a = 0$ のとき，解は空集合．
- $a = 2$ のとき，解は直線 $\dfrac{x-5}{-8} = \dfrac{y+2}{3} = z$．
- $a \neq 0, 2$ のとき，解は点 $\left(-\dfrac{2}{a} + 2,\ \dfrac{1}{a} - 1,\ \dfrac{1}{a}\right)$．

6 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式

$$[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\,]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

と見なせる．係数行列を簡約化すると，

$$[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立とは ① の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから，求める条件は $k \neq 1$．

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属とは ① が自明でない解をもつことであるから，求める条件は $k = 1$．このとき ① の解は $c_1 = -t$, $c_2 = t,\, c_3 = -t,\, c_4 = t$ (t は任意定数)．特に，$t = -1$ と選び，非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$ を得る．