

数学演習第一 (演習第6回)

線形：連立1次方程式

2017年6月7日

1 行列 $[A \ b]$ の簡約行列が
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 連立1次方程式 $Ax = b$ を解け。(主成分に対応しない変数を任意定数を表すパラメータにとる)
- (2) A の簡約行列を書け。また、同次連立1次方程式 $Ax = 0$ を解け。

2 演習書問題 8.2.9 (1) および 問題 8.2.10 (1), (2), (3) を解け。

3 次の連立1次方程式を解け。((1)は逆行列を用い、(2)は拡大係数行列を簡約化せよ。)

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

4 次の同次連立1次方程式を解け。更に、基本解と解の自由度を求めよ。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5 連立1次方程式
$$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + az = 1 \\ 2x + 4y + a^2z = a \end{cases}$$
 について以下の問いに答えよ。

- (1) 係数行列と拡大係数行列の階数を調べよ。(aの値によって場合分けせよ。)
- (2) (1)の場合分けに対応して、解の個数(ただ1つ、無数、なし)を調べよ。
- (3) 解を「3平面の共有点の集合」と見て、図形的な言葉(点、直線、空集合)で解を表現せよ。

6 ベクトル $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数)について次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 が1次独立(すなわち $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$)となるような k の条件を求めよ。
- (2) a_1, a_2, a_3, a_4 が1次従属(すなわち $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 = 0$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在)となるような k の条件を求めよ。また、そのとき a_1, a_2, a_3, a_4 の非自明な1次関係式 $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 = 0$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$) を1つ挙げよ。

[ヒント] c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数とする同次連立1次方程式を考えよ。