数学演習第一（演習第 7 回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開　　2017 年 6 月 21 日

1 $n \geq 1$ とする. (実は, 得られる式は (3), (7), (8) を除いて $n=0$ でも正しい.)

(1) $y^{(n)} = e^x$.　(2) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.　(3) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.　(4) $y^{(n)} = \sin\Big(x + \dfrac{n\pi}{2}\Big)$.　(5) $y^{(n)} = \cos\Big(x + \dfrac{n\pi}{2}\Big)$.

(6) $y' = f'(ax+b) \cdot \{ax+b\}' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(7) (3) と (6) の結果を使うと, $y^{(n)} = (-3)^n \cdot \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2-3x)^n} = -\dfrac{3^n(n-1)!}{(2-3x)^n}$.

(8) (5) と (6) の結果を使うと, $y^{(n)} = \Big\{\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\Big\}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\{\cos 2x\}^{(n)} = 2^{n-1}\cos\big(2x + \dfrac{n\pi}{2}\big)$.

(9) $\dfrac{1}{1-x-2x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1-2x}\Big)$ と部分分数分解し, (2) と (6) の結果を用いて,

$$y^{(n)} = \Big\{\frac{1}{1-x-2x^2}\Big\}^{(n)} = \frac{1}{3}\Big\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2\cdot(-2)^n\cdot(-1)^n n!}{(1-2x)^{n+1}}\Big\} = \frac{n!}{3}\Big\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\Big\}.$$

(10) $y = x^2 e^{-2x}$ より, $y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2-x)e^{-2x}$. $n \geq 2$ のときは Leibniz(ライプニッツ) の公式を用いて,

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{x^2\}^{(k)}\{e^{-2x}\}^{(n-k)} = x^2\{e^{-2x}\}^{(n)} + n\cdot 2x\{e^{-2x}\}^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\{e^{-2x}\}^{(n-2)}$$
$$= \big\{(-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1}x + n(n-1)(-2)^{n-2}\big\}e^{-2x} = (-2)^n\big\{x^2 - nx + \frac{1}{4}n(n-1)\big\}e^{-2x}.\quad (n=0,1 \text{ でも正しい})$$

(11) $y = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ より, $y^{(n)} = \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(-\dfrac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\dfrac{1}{2}-(n-1)\Big)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}$. ここで,

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-(n-1)\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{2n-1}{2}\Big) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n} \text{ より}, \ y^{(n)} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

(12) $y = e^{-x}\sin x$ より, $y' = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\Big(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\Big) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\big(x + \dfrac{3\pi}{4}\big)\ \Big(= -\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\big(x - \dfrac{\pi}{4}\big)\Big)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\big(x + \dfrac{3n\pi}{4}\big)\ \Big(= (-\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\big(x - \dfrac{n\pi}{4}\big)\Big)$. Leibniz(ライプニッツ) の公式を用いた表現も比較のため書くと $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{e^{-x}\}^{(n-k)}\{\sin x\}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-x}\sin\big(x + \dfrac{k\pi}{2}\big)$.

2 (1) $f(x) = e^x$ より $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ $(n \geq 0)$. よって, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!} + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{N!}x^N$ $(0<\theta<1)$.

特に, $N=6$ なら, $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(2) $f(x) = \sin x$ より $f^{(n)}(x) = \sin\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big)$, $f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n=2m) \\ (-1)^m & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n \geq 0)$. よって,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + R_{2M+1}(x),\quad R_{2M+1}(x) = \frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}\ (0<\theta<1).\quad (\text{例題 3.8 解説参照})$$

特に, $N=6$ なら, $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(3) $f(x) = \cos x$ より $f^{(n)}(x) = \cos\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big)$, $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (n=2m) \\ 0 & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n \geq 0)$. よって,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x) = \frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M)!}x^{2M}\ (0<\theta<1).$$

特に, $N=6$ なら, $\cos x = 1 - \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!} + R_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ より, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n \geq 0)$. これより, $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ $(n \geq 0)$. よって, $x > -1$ に対して

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x^n + R_N(x),\quad R_N(x) = \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}\ (0<\theta<1).$$

特に, $N=6$ なら, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + R_6(x)$. 【注】等比数列の和の公式により $R_N(x) = \dfrac{(-x)^N}{1+x}$ が成立.

(5) $f(x) = \log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n \geq 1)$. これより, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n \geq 1)$. よって, $x > -1$ に対して, $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}x^N$ $(0<\theta<1)$. 特に, $N=6$ なら, $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + R_6(x)$.

(6) $\boxed{2}$ (4) の結果を用いて, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $(n\geq 0)$.

よって, $x>-1$ に対して, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{(2N-1)!!}{(2N)!!}\dfrac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}$ $(0<\theta<1)$.

特に, $N=6$ なら, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+R_6(x)$.

(7) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, 以下同様にして, $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$.
故に, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=\binom{\alpha}{k}$, $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}=\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}$. よって,

$$(1+x)^\alpha=f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k+\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n$$

【注】 剰余項 $R_N(x)$ を評価するなどして, (1) から (7) までの関数は無限級数に表示できることが分かる ((4) から (7) は範囲が制限される).

(1) $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, (2) $\sin x=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, (3) $\cos x=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$, (4) $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ $(-1<x<1)$,

(5) $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(-1<x\leqq 1)$, (6) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ $(-1<x\leqq 1)$.

(7) については教科書の p.151 参照.

$\boxed{3}$ (1) $\{a^x\}^{(n)}=(\log a)^na^x$ を用いて, $a^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(\log a)^na}{n!}(x-1)^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{(\log a)^Na^{1+\theta(x-1)}}{N!}(x-1)^N$ $(0<\theta<1)$.

(2) $\{x^p\}^{(n)}=\dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$ $(n\leq p)$, $=0$ $(n>p)$ より, $x^p=\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(x-1)^n$. ($N$ 次剰余項は 0)

$\boxed{4}$ (1) $\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$ (合成関数の微分公式) の微分に, 積・合成関数の微分公式を適用して,

$$\begin{aligned}\{g(f(x))\}''&=\{g'(f(x))\cdot f'(x)\}'=\{g'(f(x))\}'\cdot f'(x)+g'(f(x))\cdot f''(x)\\&=g''(f(x))f'(x)\cdot f'(x)+g'(f(x))f''(x)=g''(f(x))\,f'(x)^2+g'(f(x))f''(x).\end{aligned}$$

変数の関係 (z は y の関数, y は x の関数, 合成して z は x の関数) で上の計算を表現すれば, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ から出発して,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\Big(\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\Big)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{dz}{dy}\Big)\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dy^2}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2+\frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

(2) 導関数の計算まで含めて説明する. まず, 仮定により $t=\varphi^{-1}(x)$ であるから $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける. よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$y'=\{\psi(\varphi^{-1}(x))\}'=\psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}'=\psi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

すなわち $\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)_{x=\varphi(t)}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ が成り立つ. 次に, $\omega(t)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $y'=\omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $y''=\{\omega(\varphi^{-1}(x))\}'=\dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t)=\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big)_{x=\varphi(t)}=\frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

変数の関係 (y は t の関数, t は x の関数 (= [x は t の関数] の逆関数), 合成して y は x の関数) で上の計算を表現すれば,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Big)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\big(\frac{dx}{dt}\big)^3}.$$

$\boxed{5}$ $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $f''(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{6\sin^3 x}{\cos^4 x}=\dfrac{5\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{6\sin^3 x}{\cos^4 x}$,

$f^{(4)}(x)=\dfrac{5}{\cos x}+\dfrac{10\sin^2 x}{\cos^3 x}+\dfrac{18\sin^2 x}{\cos^3 x}+\dfrac{24\sin^4 x}{\cos^5 x}=\dfrac{5}{\cos x}+\dfrac{28\sin^2 x}{\cos^3 x}+\dfrac{24\sin^4 x}{\cos^5 x}$,

$f^{(5)}(x)=\dfrac{(5+28\cdot 2)\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{(28\cdot 3+24\cdot 4)\sin^3 x}{\cos^4 x}+\dfrac{(24\cdot 5)\sin^5 x}{\cos^6 x}=\dfrac{61\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{180\sin^3 x}{\cos^4 x}+\dfrac{120\sin^5 x}{\cos^6 x}$,

$$\begin{aligned}f^{(6)}(x)&=\frac{61}{\cos x}+\frac{(61\cdot 2+180\cdot 3)\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{(180\cdot 4+120\cdot 5)\sin^4 x}{\cos^5 x}+\frac{(120\cdot 6)\sin^6 x}{\cos^7 x}\\&=\frac{61}{\cos x}+\frac{662\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1320\sin^4 x}{\cos^5 x}+\frac{720\sin^6 x}{\cos^7 x},\end{aligned}$$

同様にして, $f^{(7)}(x)=\dfrac{1385\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{7266\sin^3 x}{\cos^4 x}+\dfrac{10920\sin^5 x}{\cos^6 x}+\dfrac{5040\sin^7 x}{\cos^8 x}$.

よって, $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=5$, $f^{(5)}(0)=0$, $f^{(6)}(0)=61$ で,

$4!=24$, $6!=720$, $7!=5040$ に注意すると,

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{1385\tan(\theta x)+7266\tan^3(\theta x)+10920\tan^5(\theta x)+5040\tan^7(\theta x)}{5040\cos(\theta x)}x^7.$$