数学演習第一（演習第 7 回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2017 年 6 月 21 日

1 次の x の関数 y の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ. (問題 3.2.5 類題)

(1) $y = e^x$　(2) $y = 1/x$　(3) $y = \log x$　(4) $y = \sin x$　(5) $y = \cos x$

導関数を (4) では sin を使って書き，(5) では cos を使って書くと $y^{(n)}$ が統一的に記述できる．教科書 p.40 例 3 参照.

(6) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)

(7) $y = \log(2-3x)$ ((3) と (6) を使う)　(8) $y = \cos^2 x$ ($\cos 2x$ を使った式に変形して (5) と (6) を使う)

(9) $y = \dfrac{1}{1-x-2x^2}$ (部分分数分解して (2) と (6) を使う)　(10) $y = x^2 e^{-2x}$

(11) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ($\underbrace{\text{2 重階乗}}_{\text{下記参照}}$ を用いて表せ)

(12) $y = e^{-x}\sin x$ (導関数を cos を使わず sin を使った式に変形すると $y^{(n)}$ が見やすい式になる)

なお, $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) \quad \text{if } n \geq 1 : \text{奇数} \\ 2\cdot 4\cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) \quad \text{if } n \geq 2 : \text{偶数} \end{cases} \qquad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される (n の 2 **重階乗**).

2 次の各関数 $f(x)$ に対して，$\underline{f^{(n)}(0) \text{ を計算し}}$，有限 Maclaurin (マクローリン) 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \quad \underset{\theta \text{ は } N, x \text{ に依存}}{(0 < {}^\exists\theta < 1)}$$

を書け ((2), (3) の N は指示の形). 更に, $N = 6$ の場合を具体的な数字を使って表せ ($R_6(x)$ の具体形は不要).

(1) $f(x) = e^x$　(2) $f(x) = \sin x$ ($N = 2M+1$)　(3) $f(x) = \cos x$ ($N = 2M$)

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$　(5) $f(x) = \log(1+x)$　(6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　((4) から (7) は $x > -1$ の範囲で考える)

(7) $f(x) = (1+x)^\alpha$ (αは実数)　ただし，この問題では，$N = 6$ の場合を具体的な数字を使って書かなくてよく，また，次の記号を使ってよい.

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & (k \text{ が正の整数のとき}) \\ 1 & (k = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(α が自然数のときの 2 項係数を α が任意の実数の場合に一般化したもの.)

3 2 つの関数 a^x, x^p ($a > 0, p \in \mathbb{N}$) に対して, $x = 1$ における有限 Taylor (テーラー) 展開を N 次 ($N > p$) の剰余項まで求めよ.

4 2 次導関数に関して, 以下の問いに答えよ. 但し, 現れる関数はすべて 2 回微分可能であるとする.

(1) $y = f(x)$, $z = g(y)$ の合成関数 $z = g(f(x))$ の導関数は

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ. (微積教科書 問題 2.3–3)

(2) $\varphi'(t) \neq 0$ のとき, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ により y は x の関数となり, 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ が

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

で与えられる. 2 次導関数をそれぞれに対応する形で求めよ.

5 $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ の有限 Maclaurin 展開 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$ を $N = 7$ のときに書き表せ.