数学演習第一（演習第８回）【解答例】

線形： 正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式　　2017 年 6 月 28 日

$\boxed{1}$ (1) A が正則と仮定すれば, 仮定 $AB=O$ $(B\neq O)$ より, $B=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}O=O$ が導かれ, 矛盾を生じる.

(2) $AB=cE=BA$ $(c\neq 0)$ を c で割って, $A(c^{-1}B)=E=(c^{-1}B)A$ が成り立つから, A の逆行列 $A^{-1}=c^{-1}B$ が得られる.

(3) まず, 容易に $A\widetilde{A}=(ad-bc)E=\widetilde{A}A$. 次に, $ad-bc=0$ のとき A は零因子であることを示す. $A\neq O$ ならば $\widetilde{A}\neq O$ かつ $A\widetilde{A}=O$ であるから, A は零因子. また $A=O$ ならば例えば $OE=O$ であるからやはり零因子. よって, (1) の結果により $ad-bc=0$ のとき A は正則でない. 最後に, $ad-bc\neq 0$ のとき, (2) の結果により, A の逆行列 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ が得られる (A は正則). 以上が証明すべきことであった

$\boxed{2}$ 2 次正方行列の逆行列の計算には公式を用いるのがよい.

(1) $\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{15-8}\begin{bmatrix}5&-4\\-2&3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}5&-4\\-2&3\end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-\cos^2\theta-\sin^2\theta}\begin{bmatrix}-\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$.

以下では, 行基本変形が何回か繰り返されていることを $\dashrightarrow$ で表した.

($\boxed{P_i(c)}$, $\boxed{P_{ij}}$, $\boxed{P_{i_1j}(c_1)\cdots P_{i_kj}(c_k)}$ のいずれか 1 つにより得られる行基本変形を $\to$ で表すことが多いが, これらのいくつかの組み合わせを $\to$ で表すこともある. 紛らわしいので, ここでは記号 $\dashrightarrow$ を導入して区別した.)

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&1&0&1\\0&3&2&0&1&0\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&1&0&1\\0&0&-1&-3&1&-3\end{bmatrix}\dashrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-5&2&-6\\0&1&0&-2&1&-2\\0&0&1&3&-1&3\end{array}\right]$$
より, 逆行列は $\begin{bmatrix}-5&2&-6\\-2&1&-2\\3&-1&3\end{bmatrix}$.

(4)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&1&1&0&0\\1&-3&2&0&1&0\\2&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1&-3&2&0&1&0\\-3&2&1&1&0&0\\2&1&-3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&2&0&1&0\\0&-7&7&1&3&0\\0&7&-7&0&-2&1\end{bmatrix}$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&0&1&0\\0&-7&7&1&3&0\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]$$
より正則でない.

(5)
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&2&3&1&0&0&0\\1&2&3&2&0&1&0&0\\2&3&2&1&0&0&1&0\\3&2&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\dashrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\0&-1&-4&-3&0&-2&1&0\\0&-4&-8&-6&0&-3&0&1\end{bmatrix}$$
$$\dashrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-4&-2&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\0&0&-2&0&1&-2&1&0\\0&0&0&6&4&-3&0&1\end{bmatrix}\dashrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-4&-\frac{5}{2}&2&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&3&2&-2&1&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$
$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{6}&0&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{6}\end{array}\right]$$
より, 逆行列は $\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&-3&4\\0&-3&6&-3\\-3&6&-3&0\\4&-3&0&1\end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ (1) $\begin{vmatrix}2&3\\5&4\end{vmatrix}=8-15=-7$.　　(2) $\begin{vmatrix}\lambda-2&2\\-1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)+2=\lambda^2-7\lambda+12=(\lambda-3)(\lambda-4)$.

(3) $\begin{vmatrix}-2&1&0\\3&-3&1\\1&2&3\end{vmatrix}=18+1-(-4)-9=14$.　　(4) $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\c&b&\lambda+a\end{vmatrix}=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$.

(5) $\begin{vmatrix} \lambda & 4 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-7) - 8(\lambda-7) = (\lambda^2-2\lambda-8)(\lambda-7) = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-7).$

(6) $|P| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1, \qquad |Q| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$$= \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi - (-\sin^2\theta\cos^2\varphi) - (-\cos^2\theta\sin^2\varphi)$$
$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos^2\varphi + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin^2\varphi = 1.$$

(行列の積の行列式は行列式の積になることを学んだあとなら，これと，$\boxed{6}$(2) のヒントに書いてあることからも，$|R| = r$, $|S| = r^2\sin\theta$ がわかる.)

$\boxed{4}$ (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -3$ より, 求める面積は $|-3| = 3$. (2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -4$ より, 求める体積は $|-4| = 4$. (3) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の外積は $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ より, 求める面積は $\|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}\| = 2\sqrt{1+16+4} = 2\sqrt{21}$.

$\boxed{5}$ 【説明の例】 $[A \quad B]$ が $[E \quad C]$ まで行基本変形されたとき, A は E まで変形されるので正則. また, $B = [\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n]$, $C = [\boldsymbol{c}_1 \ \boldsymbol{c}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{c}_n]$ とすれば, $[A \quad \boldsymbol{b}_i]$ が $[E \quad \boldsymbol{c}_i]$ まで変形されるので $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_j$ である $(j = 1, \ldots, n)$. まとめて考えれば, $AX = B$ の解が $X = C$ となるから, $C = A^{-1}B$ が成り立つ.

(1) $\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -9 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] = \left[E \mid A^{-1}B\right]. \qquad \therefore X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -8 & -9 & -10 \\ -3 & -3 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$

(2) $YA = B$ の転置をとって, $YA = B$ と同値な行列方程式 ${}^{\mathrm{t}}\!A\,{}^{\mathrm{t}}Y = {}^{\mathrm{t}}B$ を得る.

$\left[{}^{\mathrm{t}}\!A \mid {}^{\mathrm{t}}B\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 13 & -5 \end{bmatrix}$

$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 13 & -5 \end{array}\right] = \left[E \mid ({}^{\mathrm{t}}\!A)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}B\right] = \left[E \mid {}^{\mathrm{t}}(BA^{-1})\right]. \quad \therefore Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 12 & -4 & 13 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$

【注】列基本変形を用いれば, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$ となる (上の計算を転置して実行することに他ならない).

$\boxed{6}$ (1) $A = \left[\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\right]$ とすれば, ${}^{\mathrm{t}}\!AA$ の (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ で与えられる. よって, A が直交行列であることを示すには A の異なる 2 つの列が直交し, かつ各列が長さ (ノルム) 1 であることを確かめればよい. 与えられた行列 P, Q はともにその性質をもっている (計算省略) ので直交行列である. 従って,

$$P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = {}^{\mathrm{t}}Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) A, B がサイズの等しい正則行列なら, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ. これとヒントを用いて,

$$R^{-1} = \left(P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix},$$

$$S^{-1} = \left(Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

【注】R, S はそれぞれ平面, 空間における極座標変換 (極座標から直交座標への座標変換) に関するヤコビ行列である.