

数学演習第一 (演習第8回)

線形：正則行列, 逆行列, 2次または3次の行列式

2017年6月28日

【注意】正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) をみたす行列 B が存在するとき, B を A の逆行列といい, 逆行列をもつ行列を正則行列と呼ぶ.

1 (演習第2回の復習) 正方行列 A に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) A が零因子 ($AB = O$ なる正方行列 $B \neq O$ が存在) なら, A は正則でないことを示せ (線形教科書 問 4.11).
 (2) $AB = cE = BA$ となる行列 B と数 $c \neq 0$ が存在するなら, A は正則であることを示せ (逆行列を求めよ).
 (3) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおき, $A\tilde{A}$ および, $\tilde{A}A$ を計算せよ. 更に, これと (1), (2) の結果を

用いて, A が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり, 逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ.

2 次の行列について, 正則ならば逆行列を求めよ. (2次正方行列に対しては上記の公式を用いるのが効率的.)

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3 次の行列式を計算せよ (線形教科書 例 10.2 を確認). なお, (2), (5) については因数分解された形で答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda + a \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} \lambda & 4 & -2 \\ 2 & \lambda - 2 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$
 (6) [6] (1) の P, Q の行列式

4 平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ に対して, 次の面積, 体積を計算せよ. (線形教科書 pp.85-86 「行列式の幾何学的意味」と pp.8-9 「空間ベクトルの外積」参照)

- (1) \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積. (2) $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の張る平行六面体の体積. (3) \mathbf{p}, \mathbf{q} の張る平行四辺形の面積.

5 m 次正方行列 A , $m \times n$ 行列 B に対して, $m \times (m+n)$ 行列 $[A \ B]$ に行基本変形を繰り返して $[E \ C]$ まで変形できたならば, A は正則行列であり, $C = A^{-1}B$ が成り立つ. この理由を説明せよ. また, この事実を用い

て, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の行列方程式を解け.

- (1) $AX = B$ (2) $YA = B$ (ヒント: 転置を考えよ)

6 正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たすとき, A を直交行列と呼ぶ. このとき, A の逆行列が $A^{-1} = {}^tA$ で与えられる.

(1) $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$ が直交行列であることを確かめ, 逆行列を求めよ. [ヒント] $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ のとき, tAA の (i, j) 成分は $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ ($\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ の内積) で与えられる.

(2) $r \sin \theta \neq 0$ のとき, $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$ の逆行列を求め

よ. [ヒント] R, S は (1) の行列 P, Q にそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix}$ を右から掛けて得られる.