数学演習第一　（演習第９回）

微積：漸近展開，積分の計算 (1)

2017 年 7 月 5 日

0　【確認問題】空欄に適当な式を記入しながら，今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ．

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $h(x)$ が $\boxed{}$ をみたすとき，$h(x) = o(x^n)\ (x \to 0)$ と表す．

漸近展開の要点

関数 $f(x)$ の $x = 0$ における n 次の漸近展開を求めることとは，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\ (x \to 0) \qquad \cdots (*)$$

となる x の多項式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ を求めることである．
微積教科書の定理 2.4.5 より $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ だから，(a)〜(d) に挙げる代表的な関数は，$x \to 0$ で次のように漸近展開される．

(a) $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$　ただし $\dbinom{\alpha}{k} = \boxed{}$

(b) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boxed{}\, x^{2k} + o(x^{2n})$,

$\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boxed{}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(c) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boxed{}\, x^k + o(x^n)$

(d) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boxed{}\, x^k + o(x^n)$

しかし，より複雑な関数 $f(x)$ に対しては，$x = 0$ **における漸近展開を求めるのに** $f^{(n)}(0)$ **を直接計算するのは大変**になることが多い．そこで，$x = 0$ の周りで C^n 級の関数に対して，$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ は一意的に定まることに注意すると，**(a)〜(d) の漸近展開を組み合わせる**ことで，$(*)$ をみたす $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ を一つ見つけてしまえば，それが漸近展開に他ならない．

例題　関数 $e^x \cos x$ の $x = 0$ のまわりでの 3 次の漸近展開を求めよ．

［解］　(1) e^x と $\cos x$ の 3 次までの漸近展開を用いると

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{2!}x^2\right) + o(x^3)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - (1+x)\frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$\boxed{1}$ （**漸近展開**） 次の関数の漸近展開を指定された次数まで求めよ (いずれも $x \to 0$). ただし, $\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})$ $(x \to 0)$ を用いてよい.

(1) e^{-x^2} (6 次)　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (6 次)

(3) $\sinh x$ (4 次)　　(4) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ (4 次)

(5) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ (4 次)　　(6) $\log(\cos x)$ (6 次)

(7) $\mathrm{Sin}^{-1}x$ (7 次)　　(8) $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2+t)\,dt$ (4 次)

(9) $\dfrac{x}{\cos x}$ (5 次)　　(10) $\tan x$ (5 次)

$\boxed{2}$ （**漸近展開の応用**） 漸近展開を用いて次の 2 つの極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sinh^2 x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^7}\int_0^x (\sin(t^2) - t^2)\,dt$

$\boxed{3}$ （**高校程度の積分計算の復習**）

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$　　(ii) $\displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$　　(iv) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin mx)(\sin nx)\,dx$ (m, n は自然数)

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$　　(vi) $\displaystyle\int_0^\pi |\sin x + \cos x|\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin x)\log(\sin^2 x)\,dx$

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ.

(i) $\displaystyle f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$　　(ii) $\displaystyle g(x) = \int_0^x (t-x)\sin t\,dt$