数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形： 4 次以上の行列式　　2017 年 7 月 12 日

1

(1) 同じ行があれば行列式は 0 だから，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 0.$

(2) 行列式は各行に関して線形だから，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 4.$

(3) $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ -3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ -3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \\ 4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 3\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

$= -6\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = -12.$　　(4) $\det(3A) = 3^4\det(A) = 3^4 \cdot 2 = 162.$

(5) 転置しても行列式は変わらないから，$|{}^tA| = |A| = 2.$ (転置しても行列式は変わらないことから，以下では，行について成り立つことは列についても成り立つことに注意する．)

2

(1) $$\begin{vmatrix} 0&1&2&3 \\ 1&2&3&0 \\ 2&3&0&1 \\ 3&0&1&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&0 \\ 0&1&2&3 \\ 2&3&0&1 \\ 3&0&1&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&0 \\ 0&1&2&3 \\ 0&-1&-6&1 \\ 0&-6&-8&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3 \\ -1&-6&1 \\ -6&-8&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3 \\ 0&-4&4 \\ 0&4&20 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -4&4 \\ 4&20 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1&-1 \\ 1&5 \end{vmatrix} = 96.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1&2&3&4 \\ 12&13&14&5 \\ 11&16&15&6 \\ 10&9&8&7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&1&4 \\ 12&13&1&5 \\ 11&16&-1&6 \\ 10&9&-1&7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&1&4 \\ 11&11&0&1 \\ 12&18&0&10 \\ 11&11&0&11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11&11&1 \\ 12&18&10 \\ 11&11&11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11&11&1 \\ 12&18&10 \\ 0&0&10 \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 11&11 \\ 12&18 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11&0 \\ 12&6 \end{vmatrix} = 660.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 2&8&4&1 \\ 7&6&7&1 \\ 2&4&4&0 \\ 1&2&5&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&6&-1&0 \\ 6&4&2&0 \\ 2&4&4&0 \\ 1&2&5&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&6&-1 \\ 6&4&2 \\ 2&4&4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1&6&-1 \\ 3&2&1 \\ 1&2&2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1&3&-1 \\ 3&1&1 \\ 1&1&2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1&3&-1 \\ 0&-8&4 \\ 0&-2&3 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} -8&4 \\ -2&3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2&1 \\ -2&3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2&1 \\ 0&2 \end{vmatrix} = -128.$$

(4) $$\begin{vmatrix} 2&-1&3&-2 \\ 1&7&1&-1 \\ 3&5&-5&3 \\ 4&-3&2&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&-1&3&0 \\ 1&7&1&0 \\ 3&5&-5&6 \\ 4&-3&2&3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&3&0 \\ 1&7&1&0 \\ 3&5&-5&2 \\ 4&-3&2&1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&3&0 \\ 1&7&1&0 \\ -5&11&-9&0 \\ 4&-3&2&1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&3 \\ 1&7&1 \\ -5&11&-9 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2&-1&1 \\ 1&7&0 \\ -5&11&-4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&1 \\ 1&7&0 \\ 3&7&0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1&7 \\ 3&7 \end{vmatrix} = 21\begin{vmatrix} 1&1 \\ 3&1 \end{vmatrix} = -42$$

3

(1) $$|A| = \begin{vmatrix} 2&3&0 \\ 1&0&3 \\ 4&3&6 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 2&1&0 \\ 1&0&1 \\ 4&1&2 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 2&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&0&0 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $A = [a_{ij}]$ $(1 \le i, j \le 3)$, $\widetilde{a}_{ij}$ を (i,j) 余因子とする．

$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 0&3 \\ 3&6 \end{vmatrix} = -9,$　$\widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1&3 \\ 4&6 \end{vmatrix} = 6,$　$\widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1&0 \\ 4&3 \end{vmatrix} = 3,$

$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 3&0 \\ 3&6 \end{vmatrix} = -18,$ $\widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2&0 \\ 4&6 \end{vmatrix} = 12,$　$\widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2&3 \\ 4&3 \end{vmatrix} = 6,$

$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 3&0 \\ 0&3 \end{vmatrix} = 9,$　$\widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2&0 \\ 1&3 \end{vmatrix} = -6,$　$\widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2&3 \\ 1&0 \end{vmatrix} = -3.$

よって A の余因子行列 $\widetilde{A}={}^t[\widetilde{a}_{ij}]$ は $\begin{bmatrix}-9 & -18 & 9\\ 6 & 12 & -6\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}$.

4 (1) $|dE|=d^n$.

(2) 恒等式 $A\widetilde{A}=|A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\widetilde{A}|=||A|E|$．行列の積の行列式は行列式の積になるから，左辺 $=|A||\widetilde{A}|$．また，(1) より，右辺 $=|A|^n$．よって，$|A||\widetilde{A}|=|A|^n$．両辺を 0 でない多項式 $|A|$ で割り算して，$|\widetilde{A}|=|A|^{n-1}$.

($A=[a_{ij}]$ とすると，$\widetilde{A}$ の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で，$|A|, |\widetilde{A}|$ ともに，n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である．よって，上記のように，$|\widetilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は，まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり，従って，n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる．)

5 $\boldsymbol{e}=w\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d}$ の両辺に $|\bullet,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|$ を施して，$|\boldsymbol{e},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=|w\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|$. 行列式は各列に関して線形で，同じ列があれば行列式はゼロだから，

$$|w\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=w|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|+x|\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|+y|\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|+z|\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=w|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|.$$

故に，$w|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{e},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|$．仮定から，$|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=3$, $|\boldsymbol{e},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=1$ だから，したがって，$w=\dfrac{1}{3}$ となる．
同様にして，$w\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}$ の両辺に $|\boldsymbol{a},\bullet,\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|$ を施して，$x|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{a},\boldsymbol{e},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|$．仮定から，$|\boldsymbol{a},\boldsymbol{e},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|=3$ だから，したがって，$x=1$ となる．
同様にして，$y=\dfrac{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|}=2$，$z=\dfrac{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}|}{|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}|}=-2$.
（クラメールの公式，自明に思えるようになりましたか？）

6 (1) $|P_2|=\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{vmatrix}=1$ である．$n\geq 2$ なる自然数に対し，$\begin{vmatrix}P'_n\\ \boldsymbol{p}_n\end{vmatrix}=|P_n|=1$ を仮定すると，$|P_{n+1}|$ を $n+1$ 列目で余因子展開することにより，

$$|P_{n+1}|=\begin{vmatrix}P'_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{p}_n\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \boldsymbol{p}_n\sin\theta_n & \cos\theta_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}P'_n\\ \boldsymbol{p}_n\sin\theta_n\end{vmatrix}\sin\theta_n+\begin{vmatrix}P'_n\\ \boldsymbol{p}_n\cos\theta_n\end{vmatrix}\cos\theta_n=\begin{vmatrix}P'_n\\ \boldsymbol{p}_n\end{vmatrix}(\sin^2\theta_n+\cos^2\theta_n)=1$$

となる．故に，帰納法により $n\geq 2$ なる自然数に対し $|P_n|=1$ である．特に $|P_5|=1$.

(因みに，$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta_1\\ r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \vdots\\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{bmatrix}$ を n 次元での極座標変換とするとき，P_n は

$\begin{bmatrix}dx_1\\ dx_2\\ dx_3\\ \vdots\\ dx_{n-1}\\ dx_n\end{bmatrix}=P_n\begin{bmatrix}dr\\ rd\theta_1\\ r\sin\theta_1 d\theta_2\\ \vdots\\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}d\theta_{n-2}\\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-1}\end{bmatrix}$ という形で現れる直交行列である．

(dx_i や dr, $d\theta_i$ は後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である．) P_n が直交行列であることは，n に関する帰納法でわかる．各自考えてみよ.)

(2) $\begin{vmatrix}x & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1\\ a_1 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1\\ a_1 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-a_1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1\\ 0 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1\\ 0 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1\\ 0 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1\\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1\\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1\end{vmatrix}=(x-a_1)\begin{vmatrix}x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1\\ a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1\\ a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1\\ a_2 & a_3 & a_4 & x & 1\\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1\end{vmatrix}$

以下，同様にして，上式 $=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$.