数学演習第一 （演習第10回）

線形：4次以上の行列式

2017年 7月 12日

1 A を4次正方行列とし，$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ を A の行ベクトル分割とする．A の行列式 $|A|$ の値が2であるとき，以下の行列式の値を求めよ．

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ (2) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ (3) 行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} \\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ (4) 行列式 $\det(3A)$ (5) $|{}^tA|$

2 演習書問題 9.3.2(3), 問題 9.3.3 を解け．(教科書 例題 10.7 が基本．教科書 p.77 にある列基本変形も有効．)

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

3 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ．

4 n 次正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$，E を n 次単位行列とする．

(1) $|dE|$ (d はスカラー) を d を用いて表せ． (2) $|\widetilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ．

((2) のヒント：恒等式 $A\widetilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって，左辺には教科書定理 11.3, 右辺には (1) を適用．)

5 5つの4次の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の間には，

$$|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}| = 3, \quad |\boldsymbol{e},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}| = 1, \quad |\boldsymbol{a},\boldsymbol{e},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}| = 3, \quad |\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}| = 6, \quad |\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}| = -6,$$

という，4次の行列式を用いた関係式があるという．$\boldsymbol{e} = w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d}$ と表すとき，スカラー w, x, y, z の値を求めよ．

6 (1) $|P_5| = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \cos\theta_2\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & \cos\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & \cos\theta_3\cos\theta_4 & -\sin\theta_4 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & \cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & \cos\theta_3\sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{vmatrix}$

の値を求めよ．より一般に，$P_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ とし，$n \geq 2$ なる自然数に対し，帰納的に，

$$P_{n+1} = \begin{bmatrix} P'_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p}_n\cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \boldsymbol{p}_n\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix}, \qquad \text{ただし，} P_n = \begin{bmatrix} P'_n \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \ (\boldsymbol{p}_n \text{は } P_n \text{の第 } n \text{ 行})$$

と定義するとき，$|P_n|$ の値を求めよ．

(2) x の5次式 $\begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & 1 \\ a_1 & x & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & b_{34} & b_{35} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & b_{45} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．