数学演習第一・中間統一試験【解説】

2017 年 6 月 14 日実施

1

(1) $\alpha = \tan(-1)$ とおけば，$\tan\alpha = -1 \left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$\alpha = \boxed{-\dfrac{\pi}{4}}$.

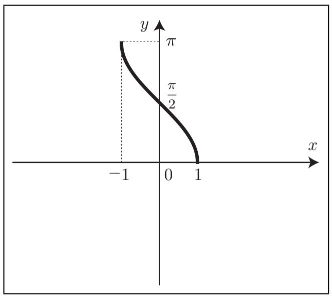
(2) $\beta = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおけば $\sin\beta = \dfrac{1}{3} \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. このとき，

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となるので，

$$(\text{与式}) = \tan(2\beta) = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{8}} = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{7}}.$$

(3) $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ のグラフは $y = \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動して得られる．よって，$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ の定義域は $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 値域は $0 \leqslant y \leqslant \pi$. また, $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ のグラフは点 $(-1, \pi)$ において直線 $x = -1$ に接し, 点 $(1, 0)$ において直線 $x = 1$ に接する.



2

説明の便宜のために, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で示した (一般的な記号というわけではない).

(4) $n(\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{2}) = \dfrac{(6^{\frac{1}{n}}-1)-(2^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{\log 6}{n}}-1}{\frac{\log 6}{n}}\cdot\log 6 - \dfrac{e^{\frac{\log 2}{n}}-1}{\frac{\log 2}{n}}\cdot\log 2 \xrightarrow{n\to\infty} \log 6 - \log 2 = \boxed{\log 3}$.

【別法】$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{n} \to 0$ であるから, $x = \dfrac{1}{n}$ とおき, ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{2}) = \lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6^x\log 6 - 2^x\log 2}{1} = \log 6 - \log 2 = \log 3.$$

【注意】 $\log 6 - \log 2$ は不正解とした (この程度の式の整理はさぼらないで欲しい).

(5) ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x-\mathrm{Tan}^{-1}x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\frac{1}{1+x^2}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-\cancel{2x})}{(1+x^2)^{-2}\cdot\cancel{2x}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

(6) まず, 対数をとって極限値を計算する．$\cosh x$ を指数関数で表してから, ロピタルの定理を用いれば,

$$\lim_{x\to 0}\log(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x+e^{-x})-\log 2}{x^2} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{2x}$$
$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right) \overset{\star}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

双曲線関数をそのまま扱うこともできる:

$$\lim_{x\to 0}\log(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cosh x)}{x^2} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{2x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\tanh^2 x}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって, 指数関数 e^x の連続性により,

$$\lim_{x\to\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}e^{\log(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{e}}. \quad (e^{\frac{1}{2}} \text{ でもよい.})$$

3

(7) $f(x) = x^{-\frac{1}{x}}$ とおけば，$\log f(x) = \log(x^{-\frac{1}{x}}) = -\dfrac{1}{x}\log x$. この両辺を x で微分して,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2}\log x - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log x - 1}{x^2}.$$

よって，$f'(x) = \dfrac{\log x-1}{x^2}\cdot x^{-\frac{1}{x}} = \boxed{x^{-\frac{1}{x}-2}(\log x - 1)}$. $\left(x^{-\frac{1}{x}}\dfrac{\log x - 1}{x^2} \text{ と表してもよい.}\right)$

(8) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{x^3(x+1)^2}$ とおけば, $\log|g(x)|=5\log|x-1|-3\log|x|-2\log|x+1|$. 両辺を x で微分して,

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{7x+3}{x(x-1)(x+1)}.$$

$$\therefore\ g'(x)=\frac{7x+3}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)^5}{x^3(x+1)^2}=\boxed{\frac{(7x+3)(x-1)^4}{x^4(x+1)^3}}.$$

【別法 1】 商の微分公式を用いて,

$$g'(x)=\frac{5(x-1)^4\cdot x^3(x+1)^2-(x-1)^5\cdot\{3x^2(x+1)^2+2x^3(x+1)}{x^6(x+1)^4}\quad(\text{分子の共通因数に注意})$$

$$=\frac{\{5x(x+1)-(x-1)(5x+3)\}(x-1)^4x^2(x+1)}{x^6(x+1)^4}=\frac{(7x+3)(x-1)^4}{x^4(x+1)^3}.$$

【別法 2】 $g(x)=(x-1)^5\cdot\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$ に積の微分公式を適用して,

$$g'(x)=5(x-1)^4\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+(x-1)^5\cdot\frac{-3}{x^4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+(x-1)^5\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{(x-1)^4}{x^4(x+1)^3}\{5x(x+1)-3(x-1)(x+1)-2(x-1)x\}=\frac{(7x+3)(x-1)^4}{x^4(x+1)^3}.$$

(9) $$\left\{\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{x+1}})^2}}\cdot\frac{-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}=\boxed{\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}}.$$

(10) $y=\sin x\ \left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ の定義域に注意して,

$$f'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{d}{dx}\sin x}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{-\sqrt{1-\sin^2 x}}=\boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

4 (11) 求める直線は, 点 A$(1,-2,3)$ を通り, $(2,3,-1)$ を方向ベクトルとする直線であるから, その方程式は

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}}\quad\text{あるいは}\quad\boxed{\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+3t\\z=3-t\end{cases}}.$$

【注意】単に「直線の方程式」と言ったら前者の形を指すことが多い.

(12) 点 H は上の直線と平面 α の交点である. 直線上の点は $(1+2t,\ -2+3t,\ 3-t)$ と書けるので, H においては

$$2(1+2t)+3(-2+3t)-(3-t)=7\quad\text{より}\quad 14t-7=7.\quad\therefore\ t=1.$$

よって, H の座標は $\boxed{(3,\ 1,\ 2)}$.

5 (13) $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{②-2\times①}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}\times②}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{①-2\times②}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix}=B$ であるから,

$PA=B$ なる P は, 例えば $P=P_{12}(-2)P_2(-\frac{1}{3})P_{21}(-2)=\boxed{\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}}$ で与えられる.

(14) $${}^{\mathrm{t}}AA=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&1&0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}5&4&-3\\4&5&-6\\-3&-6&9\end{bmatrix}}.$$

(15) ${}^{\mathrm{t}}AA=\begin{bmatrix}5&4&-3\\4&5&-6\\-3&-6&9\end{bmatrix}\xrightarrow{①-②}\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&5&-6\\-3&-6&9\end{bmatrix}\xrightarrow[③+3\times①]{②-4\times①}\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&9&-18\\0&-9&18\end{bmatrix}\xrightarrow{③+②}\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&9&-18\\0&0&0\end{bmatrix}$ より,

${}^{\mathrm{t}}AA$ の階数は $\boxed{2}$. (簡約行列まで変形してもよいが, 階数を求めるだけなら, 上の計算で十分.)

(16) $A\,{}^{t}\!A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\dfrac{1}{54} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{5}{54} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{2}{27} & \frac{7}{27} \end{bmatrix}}$.

6 (17) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列に行基本変形を施す:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & a-9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & a-9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+2\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 \end{bmatrix}.$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式が解をもつための a の条件は $\boxed{a = 7}$ である.

(18) $a = 7$ のとき, 上の計算は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, 解くべき方程式は $\begin{cases} x \quad\ + z = 1 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$. よって, 主成分に関係しない変数 z を任意定数として $z = s$ とおき, 求める解は

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 + s \\ z = s \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数}).$$

(19) 与えられた同次連立 1 次方程式の係数行列を簡約化する:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -7 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-3\times①]{\substack{②+① \\ ③-①}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -8 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 8 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-5\times②]{\substack{①+② \\ ③-4\times②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

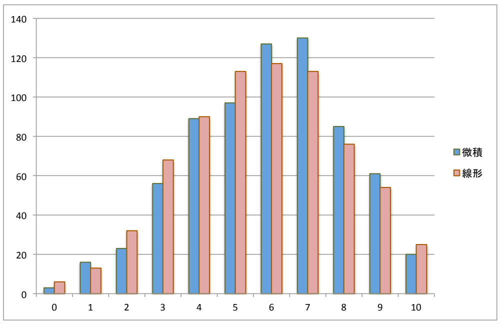
$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}\times④} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+2\times③]{\substack{①-③ \\ ②-2\times③}} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

(20) (19) の結果より, 解くべき連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\ + 3x_3 \quad\ + 4x_5 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad\ + 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$. よって, 主成分に関係しない変数 x_3, x_5 を任意定数として, $x_3 = s$, $x_5 = t$ とおき,

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -3s - 4t \\ x_2 = 2s - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t \\ x_5 = t \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

以下の得点分布は 1 年生のみの集計です.

微積・線形の得点分布 (平均: 微積 5.90, 線形 5.72)



合計の得点分布 (平均: 11.62)