数学演習第一・期末統一試験【解説】

2017 年 7 月 26 日実施

$\boxed{1}$ (1) ライプニッツの公式を使って，n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算する (後から $n=100$ とする方が要領が良い).

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)=(e^{-x}x^2)^{(n)}&=(e^{-x})^{(n)}x^2+\binom{n}{1}(e^{-x})^{(n-1)}(x^2)'+\binom{n}{2}(e^{-x})^{(n-2)}(x^2)''\\&=(-1)^ne^{-x}x^2+n(-1)^{n-1}e^{-x}2x+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x}2\\&=(-1)^ne^{-x}\{\,x^2-2nx+n(n-1)\,\}.\end{aligned}$$

任意の x に対して $e^{-x}>0$ だから，$f^{(n)}(x)=0 \iff x^2-2nx+n(n-1)=0.$
この 2 次方程式を解き, $x=n\pm\sqrt{n}$. よって $n=100$ として $x=\boxed{90,\ 110}$.

$\boxed{2}$ (2) ,(3) 有限マクローリン展開 (演習第 7 回 $\boxed{2}$ 参照) より，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

をみたす $\theta\in(0,1)$ が $x\in(-\infty,1)$ と n に依存して存在する．よって，$f(x)=-\log(1-x)$ に対して $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ と $\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ を具体的に求めればよい．$f(x)$ の導関数を順次計算すると，

$$f'(x)=\frac{1}{1-x},\ f''(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(4)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4},\cdots,f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

と求まる．よって, $f(0)=0$ と合わせ, $f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\dfrac{x^k}{k}}+\boxed{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{1-\theta x}\right)^n}$.

$\boxed{3}$ (4) 関数 $g(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac12}$ の導関数を順次計算すると，

$$g'(x)=\frac12(1+x)^{-\frac12},\ g''(x)=-\frac14(1+x)^{-\frac32},\ g'''(x)=\frac38(1+x)^{-\frac52}$$

だから，$g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(0)}{2}x^2+\dfrac{g'''(0)}{6}x^3+o(x^3)=1+\dfrac12x-\dfrac18x^2+\dfrac1{16}x^3+o(x^3)$ $(x\to0)$.
よって，答えは $\boxed{1,\dfrac12,-\dfrac18,\dfrac1{16}}$.

【別法】指数が自然数でない場合への二項定理の一般化 (演習第 9 回 $\boxed{0}$ 参照) を使うと，

$$\begin{aligned}g(x)=(1+x)^{\frac12}&=1+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+o(x^3)\\&=1+\frac12x+\frac12\left(\frac12\right)\left(-\frac12\right)x^2+\frac16\left(\frac12\right)\left(-\frac12\right)\left(-\frac32\right)x^3+o(x^3)\\&=1+\frac12x-\frac18x^2+\frac1{16}x^3+o(x^3)\quad(x\to0).\end{aligned}$$

(5) 演習第 9 回 $\boxed{0}$ にあるように，$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ や $\cos x=1-\dfrac12x^2+o(x^3)$ は導出とともに結果も覚えておく．前者で x を $2x$ に入れ替えると

$$\begin{aligned}g(x)=e^{2x}\cos x&=\left(1+2x+2x^2+\frac43x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac12x^2+o(x^3)\right)\\&=1+2x+\frac32x^2+\frac13x^3+o(x^3)\quad(x\to0).\end{aligned}$$

よって，答えは $\boxed{1,2,\dfrac32,\dfrac13}$.

【別法】$g'(x)=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$, $g''(x)=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$, $g'''(x)=e^{2x}(2\cos x-11\sin x)$ と計算できるので，$g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(0)}{2}x^2+\dfrac{g'''(0)}{6}x^3+o(x^3)=1+2x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$.

$\boxed{4}$ (6) 演習第 9 回 $\boxed{2}$(1) に少し手を加えた問題．$f(x)=\sin x$, $g(x)=\sinh x$ とおく．$f(0)=g(0)=0$ と $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=\cosh x$ より，$f'(0)=g'(0)=1$．次に $f''(x)=-\sin x$, $g''(x)=\sinh x$ だから $f''(0)=g''(0)=0$．最後に $f'''(x)=-\cos x$, $g'''(x)=\cosh x$ だから $f'''(0)=-1$, $g'''(0)=1$ が分かる．よって，

$$\sin x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$
$$\sinh x=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\frac{g'''(0)}{6}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

これより，$\sin^2 x=x^2-\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)$,　$\sinh^2 x=x^2+\dfrac{1}{3}x^4+o(x^3)$ が分かる．したがって，

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sinh^2 x}=\frac{\sinh^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\sinh^2 x}=\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\to\boxed{\frac{2}{3}}\quad(x\to 0)$$

$\boxed{5}$ (7) 演習第 11 回の最初の問題 $\boxed{1}$(1) で $a=2$ としたもの：$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2}}$.
(導出は上記演習の解答を参照のこと)

(8) 演習第 11 回 $\boxed{5}$(2) の類題：$t=\sqrt{x}$ と置換すると，$dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\dfrac{1}{2t}\,dx$ であり，積分区間の対応は $\begin{array}{c|c} x & 0\to 4\\ \hline t & 0\to 2\end{array}$ だから，$\displaystyle\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}+2}\,dx=\int_0^2\frac{2t}{t+2}\,dt$ となる．被積分関数の分母と分子がともに 1 次式なので，分子に分母の定数倍を作ってから帳尻を合わす要領で割り算を行うと，積分の計算が出来る形になる：

$$\int_0^2\frac{2t}{t+2}\,dt=\int_0^2\frac{2(t+2)-4}{t+2}\,dt=\int_0^2\left(2-\frac{4}{t+2}\right)dt$$
$$=\bigl[2t-4\log|t+2|\bigr]_0^2=4-4\log 4+4\log 2=\boxed{4(1-\log 2)}$$ (←最後の簡単化を怠ると勿体ない)

(9) 演習第 11 回 $\boxed{4}$(2) $\boxed{5}$(3) の類題：毎年のように統一試験に出題されるタイプで $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換するのが定石．このとき，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であって，積分区間の対応は $\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{2\pi}{3}\\ \hline t & 0\to\sqrt{3}\end{array}$ だから，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{1+\cos x}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}dt=\boxed{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{6}$ (10) 演習第 11 回 $\boxed{6}$(2) の類題：中間統一試験でも出題された $y=\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ のグラフを描くと，求める回転体の体積は $V=\pi\displaystyle\int_0^1(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2\,dx$ であることが分かる．演習第 11 回 $\boxed{1}$(5)-(8) と同様に「見えない 1」とのペアの部分積分が有効．若干の計算量を見越して，まずは π を外した部分の不定積分を計算しておく：

$$\begin{aligned}\int(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2\,dx=\int x'(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2\,dx&=x\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2-\int x\{\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2\,\}'\,dx\\&=x\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2+\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x\,dx\\&=x\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2-2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x+\int 2\sqrt{1-x^2}\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)'\,dx\\&=x\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2-2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x-2x.\end{aligned}$$

よって，求める体積は

$$V=\pi\left[x\,(\mathrm{Cos}^{-1}\,x)^2-2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x-2x\right]_0^1=\boxed{\pi(\pi-2)}.$$

$\boxed{7}$ (11) 2 次正方行列の逆行列を求めるときは，公式 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ が有効 (演習第 8 回 $\boxed{2}$ (2))

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}.$$

(12) ほとんどの成分が 0 である「疎行列」の逆行列は，定義式 $AA^{-1} = E$ の成分計算の仕組みをイメージをして要領良く求めたい．実際，成分計算を書き下しても

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

をみたす $a \sim i$ は $c = \dfrac{1}{3}$, $d = 1$, $h = \dfrac{1}{2}$, それ以外は 0 と簡単に求まり $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}$

(13) 演習第 8 回 $\boxed{2}$ (3), (4) の類題： $[\,A \mid E\,]$ に行基本変形を施して $[\,E \mid X\,]$ の形にする．すると $X = A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②+2\times①} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{③-②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{③\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①-2\times③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{①-②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

よって，$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{8}$ (14) 演習第 8 回 $\boxed{3}$ (3) の類題： サラスの公式で計算する：$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+4+4-4-12-3 = \boxed{-2}$.

(15) 演習第 10 回 $\boxed{1}$ にある行列式の性質を用いて，要領良く計算する：

$$\begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 3 & 5 & 7 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 29 & 31 & 37 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 3 & 5 & 7 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 7 & 5 & 3 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 3+7 & 5+5 & 7+3 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 10 & 10 & 10 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 17 & 19 & 23 \\ 1 & 1 & 1 \\ 29 & 31 & 37 \end{vmatrix} \overset{*}{=} 10\begin{vmatrix} 17 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 29 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 10(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{-40}.$$

上の計算で $\overset{*}{=}$ は，第 2 列から第 1 列を引き，第 3 列から第 1 列を引いても行列式の値が不変なことによる．

(16) 演習第 10 回 $\boxed{2}$ で学んだように，4 次以上の行列式を計算するときは，0 が多い行か列を見つけて (or 基本変形で作って)，その行か列に関して余因子展開する．与えられた行列式では，第 1 行が比較的シンプルなので，例えば，(1, 3) 成分の 1 だけを残す列基本変形を施した後，第 1 行に関して余因子展開する：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ 14 & 7 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \\ 14 & 7 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 14 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-30}.$$

$\boxed{9}$ (17) 演習第 8 回 $\boxed{3}$(2) の類題： 与えられた行列 $A = [\,a_{ij}\,]$ の (i,j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ を計算する：

$$\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad \widetilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \widetilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\widetilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \widetilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

余因子行列 $\widetilde{A}$ はこれらの成分を並べた行列の転置行列 $\widetilde{A} = {}^{\mathrm{t}}[\,\widetilde{a}_{ij}\,]$ であることに注意して,

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}}.$$

(18) 余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めたら，すぐに $A\widetilde{A}$ を計算することを勧める：

$$A\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5E$$

と $A\widetilde{A}$ が単位行列の定数倍になることを確認することで，余因子行列の検算になると同時に，一般に $A\widetilde{A} = |A|E$ だから，$|A| = 5$ が分かる．さらに $A\widetilde{A} = 5E$ より $A\left(\dfrac{1}{5}\widetilde{A}\right) = E$ だから，逆行列の定義より

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\widetilde{A} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}}.$$

$\boxed{10}$ (19) 演習第 8 回 $\boxed{3}$(5) や演習第 10 回 $\boxed{6}$(2) の類題： 最初からサラスの公式を使うと，計算が煩雑になるばかりか，展開式を因数分解する作業を伴う．共通因数を作るように行や列の足し引きをしていく．例えば，第 3 行を第 1 行と第 2 行にそれぞれ加えても行列式の値は不変だから，

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+a & -(c+a) & c+a \\ -(b+c) & b+c & b+c \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (b+c)(c+a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} \overset{*}{=} (b+c)(c+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -b & -(a+b) & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

上の計算で $\overset{*}{=}$ は，第 2 列に第 1 列を足し，第 3 列から第 1 列を引いても行列式の値が不変なことによる．

(20) クラメールの公式 (演習第 10 回 $\boxed{5}$) が有効．前問の行列 $A = \begin{bmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{bmatrix}$ を用いて，与えられた連立 1 次方程式は $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表される．クラメールの公式を使うと，

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & -b \\ -c & 0 & -a \\ -b & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{1+2}}{|A|}\begin{vmatrix} -c & -a \\ -b & a+b+c \end{vmatrix} = \frac{c(a+b+c)+ab}{2(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

最後に $(a,b,c) = (3,7,13)$ を代入して，$y = \dfrac{13\cdot 23 + 3\cdot 7}{2\cdot 10\cdot 20\cdot 16} = \boxed{\dfrac{1}{20}}$.