平成 29 年度 数学演習第二 演習第 10 回 微積：重積分 [1] (重積分の定義, 累次積分)　解答例

2017 年 12 月 20 日 実施分

重要 重積分の値を計算する際には積分領域を正しく把握することが重要である．重積分の計算問題を解くときには，まずは積分領域を描こう．但し，積分領域が容易に図示できない場合もある．例えば，$E : x^2 + 2xy + 2y^2 \leqq 1$ (p. 121), $L : (x^2 + y^2)^2 \leqq x^2 - y^2$, $F : (x^2 + y^2)^3 \leqq 8x^2y^2$ などがそうであろう．勿論，これらは人工的な図形でなく，或る種の意義があるものである．よって，積分領域の不等式による書き直しもまた大事だと云える．更に演習書の問題 **6.2.2** (2), (4) のように D を図示しても適切な変数変換はわからない．積分領域と被積分関数の形の両方を注意深く見る必要がある．

1 (1) 領域 D は 3 直線 $y = x$, $y = x/2$, $y = 1$ で囲まれた三角形である．

(i) $D : 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2y$ と見なすと

$$\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2y\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{x^3y}{3}\Big]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3}y^4\,dy = \frac{7}{3}\Big[\frac{y^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

(ii) $D : x/2 \leqq y \leqq \min\{1, x\}$ なので，$x = 1$ を境に左右に分ける．即ち，$D_1 : 0 \leqq x \leqq 1,\ x/2 \leqq y \leqq x$ と $D_2 : 1 \leqq x \leqq 2,\ x/2 \leqq y \leqq 1$

$$\iint_D x^2y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x/2}^{x} x^2y\,dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{1} x^2y\,dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2y^2}{2}\Big]_{y=x/2}^{y=x} dx + \int_1^2 \Big[\frac{x^2y^2}{2}\Big]_{y=x/2}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) dx = \Big[\frac{3}{40}x^5\Big]_0^1 + \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}\Big]_1^2 = \frac{7}{15}.$$

(2) $$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy}_{\text{半径 } x \text{ の円の面積の } 1/4} = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4}\,dx = \Big[\frac{\pi x^3}{12}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

円の面積で計算した部分は $\displaystyle\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = \Big[\frac{1}{2}\Big(y\sqrt{x^2 - y^2} + x^2 \operatorname{Sin}^{-1}\frac{y}{x}\Big)\Big]_{y=0}^{y=x} = \frac{\pi x^2}{4}$ $(x > 0)$ と計算することもできる．

(3) 領域 D は $0 \leqq x \leqq a$, $-\sqrt{a^2 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2 - x^2}$ と表せる (原点中心, 半径 a の円の右半分).

$$\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dxdy = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dy = \int_0^a 2\Big[\frac{xy^3}{3\sqrt{a^2 - x^2}}\Big]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{2}{3}x(a^2 - x^2)\,dx = \Big[\frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{6}x^4\Big]_0^a = \frac{a^4}{6}.$$

(6) 領域 D は中心 $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円であり, $0 \leqq x \leqq 1$, $-\sqrt{x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x - x^2}$ と表せる．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy = \int_0^1 \sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x - x^2}\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 - x}\,dx$$

$$= \int_1^0 2(1 - t^2)t\cdot(-2t)\,dt = 4\int_0^1 (t^2 - t^4)\,dt = \frac{8}{15}. \qquad (t = \sqrt{1 - x} \text{ で置換した})$$

置換せずに, $x\sqrt{1 - x} = \{1 - (1 - x)\}\sqrt{1 - x} = (1 - x)^{1/2} - (1 - x)^{3/2}$ と変形してもよい．

【付記】(2),(3),(6) は累次積分の順序を変えられるが計算量は増える (Web 頁で H24 の解答参照).

2 (1) 積分領域は $D_1 : 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 2 - x$ である．このとき $D_1 : 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \min\{\sqrt{y}, 2 - y\}$ なので, $\sqrt{y} \leqslant 2 - y\ (y \leqslant 1)$ より，$0 \leqq y \leqq 1$ のとき $0 \leqq x \leqq \sqrt{y}$ で, $1 \leqq y \leqq 2$ のとき $0 \leqq x \leqq 2 - y$ となる．従って,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

(6) 積分領域は $D_2=\{(x,y)|\sin y \leqq x \leqq \tan y,\ 0\leqq y\leqq \frac{\pi}{4}\}\cup\{(x,y)|\sin y\leqq x\leqq 1,\ \frac{\pi}{4}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\}$ であって，$D_2=\{(x,y)|\,\mathrm{Tan}^{-1}x\leqq y\leqq \mathrm{Sin}^{-1}x,\ 0\leqq x\leqq 1\}$ とも表せる．

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy\int_{\sin y}^{\tan y} f(x,y)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy\int_{\sin y}^{1} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_{\mathrm{Tan}^{-1}x}^{\mathrm{Sin}^{-1}x} f(x,y)\,dy.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) x についての原始関数を計算することは無理であるが, y については容易に原始関数が求まる．

$$\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{\frac12}^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy=\int_{\frac12}^1\left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x}dx=\int_{\frac12}^1 x\,dx=\frac{3}{8}.$$

積分順序を交換してこの重積分を計算することは絶望的であろう．

(2) 積分領域は $0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq x\leqq 1$ であるが, $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x$ とも表すことができる．被積分関数は e^{x^2} であり, x についての原始関数は初等関数では表せない．そこで累次積分の順序を入れ換えて,

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=\int_0^1 x\,e^{x^2}dx=\left[\frac12 e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

実は, 順序交換しなくても, 部分積分を用いて,

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}\,dx=\left[y\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right]_0^1+\int_0^1 y\,e^{y^2}\,dy=\left[\frac12 e^{y^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$0\leqq t\leqq 1$	$\lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ 0\leqq z\leqq y^2$	$\frac23(1-t^2)^{3/2}$
平面 $y=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$0\leqq x\leqq\sqrt{1-t^2},\ 0\leqq z\leqq t^2$	$t^2\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$0\leqq t\leqq 1$	$x\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1,\ \sqrt{t}\leqq y$	$\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{t}-\sqrt{t(1-t)}$

$$V_1=\int_0^1\frac23(1-t^2)^{3/2}\,dt=\frac23\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\cdot\cos\theta d\theta=\frac23\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$
$$V_1=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\frac12\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

(2)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ y^2+z^2\leqq 1$	$2\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert x\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ x^2+z^2\leqq 1$	$2\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert x\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ \lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$V_2=\int_{-1}^1 4(1-t^2)\,dt=4\cdot 2\int_0^1(1-t^2)\,dt=8\left[t-\frac13 t^3\right]_0^1=\frac{16}{3}.$$