

数学演習第二 第 11 回 線形写像の表現行列・表現行列と座標 解答例

1 (1)  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]P$  となる  $P = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]^{-1}[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

(2)(i)  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]P$  となる  $P$  を求めるには,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_i$  ( $i = 1, 2$ ) なる  $c_1, c_2$  を求めればよい. 言い換えると,  $P = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{A}}]$  である.  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ より, } [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とわかるから,}$$

$$P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) 座標の間の関係は,  $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$  であることに注意すれば,  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3a + 2b \\ -a + b \end{bmatrix}$ .

2 (1) (i)  $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

(ii)  $[f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]P_2$  となる  $P_2$  は,  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ .

(iii)  $[f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]P_3$  となる  $P_3$  は,

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iv)  $[f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]P_4$  となる  $P_4$  は,

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) (i)  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に関する  $g$  の表現行列  $M$  は,  $[g(\mathbf{a}_1), g(\mathbf{a}_2), g(\mathbf{a}_3)] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]M$  を満たす. 言い換えると,  $M = [[g(\mathbf{a}_1)]_{\mathcal{B}}, [g(\mathbf{a}_2)]_{\mathcal{B}}, [g(\mathbf{a}_3)]_{\mathcal{B}}]$  である. よって,  $[g(\mathbf{a}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $[g(\mathbf{a}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $[g(\mathbf{a}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(ii)  $\mathcal{E}_3$  から  $\mathcal{A}$  への基底変換行列が  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  であり,  $\mathcal{E}_2$  から  $\mathcal{B}$  への基底変換

行列が  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  であることから, 求める  $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$  に関する表現行列は,  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 9 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) (i)  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に関する  $h$  の表現行列  $X$  は,  $[h(\mathbf{a}_1), h(\mathbf{a}_2), h(\mathbf{a}_3)] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]X$  を満たすから,

$$X = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 5 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(ii)  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{F}$  への基底変換行列は, 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(iii)  $\mathcal{G}$  から  $\mathcal{B}$  への基底変換行列は  $\boxed{1}$ (1) の  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ . よって  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  に関する  $h$  の表現行列は,

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 8 & 5 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{5}{3} \\ -1 & -1 & -\frac{3}{3} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$  (1)  $\mathcal{E}$  から  $\mathcal{A}$  への基底変換行列が  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{E}$  から  $\mathcal{B}$  への基底変換行列が  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

であることから,  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への基底変換行列  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 15 \\ 8 & 3 & 13 \end{bmatrix}$ .

(2) (i) 求める表現行列は,  $P^{-1} \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ 13 & 7 & -10 \\ 26 & 12 & -19 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 15 \\ 8 & 3 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 9 & 5 & 14 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(ii) 求める表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ 13 & 7 & -10 \\ 26 & 12 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 11 & -19 \\ 3 & 1 & -2 \\ -41 & -17 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & -12 & 10 \end{bmatrix}.$$

(iii) (i) の結果を見るのが早い.  $\dim \text{Ker } f = 1$  である. 核に属する非自明な元の一例は  $\mathcal{B}$  に

関する座標でみて  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  だから,  $-(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3) - (-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_3) =$

$2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3$ . よって  $(2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_3)$  が基底の一例となる.  $\dim \text{Im } f = 2$  で, その基底の一例は,

$\mathcal{B}$  に関する座標でみて  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  だから,  $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3, -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_2)$ .

$\boxed{4}$  (1)  $L(1) = 2, L(x) = x - 1, L(x^2) = -2x$  より, 表現行列は  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(2)  $A$  を簡約化すると  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .  $\dim N(A) = 1$  で基底として  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  が取れ,  $\dim C(A) =$

2 で基底として,  $\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  が取れる. これを  $\mathbb{R}[x]_2$  の元に直せば,  $\dim \text{Ker } L = 1$

で基底として  $(1 + 2x + x^2)$  が取れ,  $\dim \text{Im } L = 2$  で基底として  $(2, x - 1)$  が取れる. (あるいはもっと簡単に  $(1, x)$  ととっても良い.)

(3)  $L(1+x) = 1+x, L(x+x^2) = -(1+x), L(x^2) = -2(x+x^2) + 2x^2$  より,  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

$\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への基底変換行列  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  を用いて,  $P^{-1}AP$  と求めてもよい.