

数学演習第二 第11回 (2018.1.10 実施)

線形写像の表現行列・基底変換行列・表現行列と座標

1

(1) 次で与えられる \mathbb{R}^2 の2つの基底 \mathcal{A}, \mathcal{B} について, \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底変換行列を求めよ.

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

(2) \mathbb{R}^3 の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$ の2つの基底を考える.

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

(i) \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底変換行列を求めよ.

(ii) $\mathbf{x} \in W$ の \mathcal{B} に関する座標 $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ が $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ のとき, \mathcal{A} に関する座標 $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ を a, b で表せ.

2 \mathbb{R}^3 の基底 \mathcal{A} と \mathbb{R}^2 の基底 \mathcal{B} を考える.

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

また, \mathbb{R}^3 の標準基底を \mathcal{E}_3 , \mathbb{R}^2 の標準基底を \mathcal{E}_2 とおく.

(1) 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を, $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ で定義する. 次の4つの場合について, 与えられた \mathbb{R}^3 と \mathbb{R}^2 の基底に関する f の表現行列を求めよ.

(i) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$ (ii) $(\mathcal{A}, \mathcal{E}_2)$ (iii) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{B})$ (iv) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

(2) 線形写像 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に関する表現行列が $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ であるとする.

(i) 座標 $[g(\mathbf{a}_1)]_{\mathcal{B}}, [g(\mathbf{a}_2)]_{\mathcal{B}}, [g(\mathbf{a}_3)]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ.

(ii) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$ に関する g の表現行列を求めよ.

(3) 次で定義される線形写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える.

$$h(\mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h(\mathbf{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i) h の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に関する表現行列を求めよ.

次に, $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の別の基底 \mathcal{F}, \mathcal{G} を取る.

$$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{G} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(ii) \mathcal{A} から \mathcal{F} への基底変換行列を求めよ.

(iii) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ に関する h の表現行列を求めよ.

3 $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ を基底とする 3次元ベクトル空間 V を考え、2つの基底 \mathcal{A}, \mathcal{B} を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) \\ \mathcal{B} &= (\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{w}_2 = -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_3)\end{aligned}$$

(1) \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底変換行列を求めよ。

(2) 線形写像 $f: V \rightarrow V$ の \mathcal{A} に関する表現行列が、 $\begin{bmatrix} 14 & 6 & -10 \\ 13 & 7 & -10 \\ 26 & 12 & -19 \end{bmatrix}$ であるとする。

(i) \mathcal{B} に関する f の表現行列を求めよ。

(ii) \mathcal{E} に関する f の表現行列を求めよ。

(iii) $\text{Ker } f, \text{Im } f$ の次元を求め、基底の一例を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて与えよ。

4 2次以下の実数係数1変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく。線形変換 $L: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する。

$$L(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ。

(2) A を用いて $\text{Ker } L, \text{Im } L$ の基底をそれぞれ一組求めよ。

(3) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, x^2)$ に関する L の表現行列を求めよ。

要点 (教科書『線形代数学講義』p.155, 定義 23.9, 命題 23.12)

V, W がベクトル空間で、 $f: V \rightarrow W$ が線形写像であるとする。

V の基底 $\mathcal{A} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \mathcal{A}' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m), \mathcal{B}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_m)$ を考える。 \mathcal{A}, \mathcal{B} に関する f の表現行列とは、

$$(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)A$$

を満たす $m \times n$ 行列 A のことをいう。 \mathcal{A} から \mathcal{A}' への基底変換行列とは、

$$(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)P$$

を満たす $n \times n$ 行列 P のことをいう。 \mathcal{A}' から \mathcal{A} への基底変換行列は P^{-1} である。さらに、 \mathcal{B} から \mathcal{B}' への基底変換行列を Q とするとき、 $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列は、上の記号を用いて、 $Q^{-1}AP$ と表される。