平成 29 年度 数学演習第二　演習第 12 回　微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）　解答例

2018 年 1 月 17 日 実施分

$\boxed{1}$ (1) $u = x + y,\ v = x - y$ とおくと，$x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2}$ だから，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

となる．このとき, 積分領域 D は $E = \{(u,v) \mid |u| \leqq 1/2, 0 \leqq v \leqq 1\}$ に移る．よって,

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \int_0^1 \sqrt{\frac{v}{1-u^2}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^1 \sqrt{v}\, dv = \left[\mathrm{Sin}^{-1} u\right]_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} v\sqrt{v}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}$$

(2) $u = 2x + y,\ v = 2x - y$ とおくと，$x = \dfrac{u+v}{4},\ y = \dfrac{u-v}{2}$ より $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{4}$ で，積分領域 D は $E = \{(u,v) \mid 0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v \leqq \pi/3\}$ に移る．よって

$$I_2 = \int_0^{\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^u \tan v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^u \left[-\log|\cos v|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} du = \frac{\log 2}{4} \int_0^{\pi} e^u\, du = \frac{(e^{\pi}-1)\log 2}{4}$$

(3) $u = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b},\ v = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ とおくと, $x = \dfrac{a(u-v)}{2},\ y = \dfrac{b(u+v)}{2}$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & -a/2 \\ b/2 & b/2 \end{vmatrix} = \dfrac{ab}{2}$ で, 積分領域 D は $E = \{(u,v) \mid -u \leqq v \leqq u,\ 0 \leqq u \leqq 1\}$ に移る．よって, この変換によって

$$I_3 = \frac{\sqrt{ab}}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^{u} \sqrt{(u-v)(u+v)} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 du \underline{\int_0^u \sqrt{u^2 - v^2}\, dv}$$

となる．ここで, 下線部が「半径 u の四分円の面積」であることに注意すると,

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 \frac{\pi u^2}{4}\, du = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \frac{\pi}{4 \cdot 3} = \frac{(ab)^{3/2}}{24}\pi$$

が得られる．あるいは, 微積分の教科書 p.60 の公式を復習して, 次のようにも計算できる．

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \int_0^1 \left[v\sqrt{u^2 - v^2} + u^2\, \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \mathrm{Sin}^{-1}(1) \int_0^1 u^2 du = \frac{(ab)^{3/2}}{24}\pi$$

(4) $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}},\ v = \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ とおくと，$x = au^2,\ y = bv^2$ より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$ で，積分領域 D は $E = \{(u,v) \mid 0 \leqq v \leqq 1 - u, 0 \leqq u \leqq 1\}$ に移る．よって

$$I_4 = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (au^2)(bv^2) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3 v^3\, dv = a^2b^2 \int_0^1 u^3(1-u)^4\, du = \frac{a^2b^2}{280}$$

$\boxed{2}$ (1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ である．この変換によって, 積分領域 D は長方形 $E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移る．よって,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr = 2\pi \int_0^a r e^{-r^2}\, dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^a = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{a^2}}\right)$$

(2) 積分領域 D が楕円の内部であることに注意して, $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と極座標変換を少し工夫しよう．ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$ で, D は $E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移る．

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar\cos\theta + br\sin\theta)^2 abr\, d\theta = ab \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} \{(a^2 - b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta + a^2 + b^2\}\, d\theta = \frac{ab(a^2+b^2)\pi}{4} \end{aligned}$$

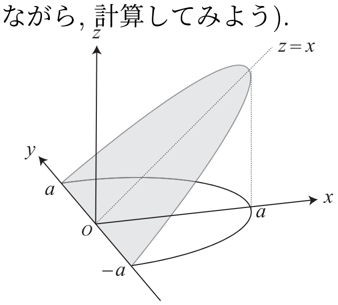
(3) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を施すと, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ で, 積分領域 D は $E=\left\{(r,\theta)\,|\,a\leqq r\leqq b,\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right\}$ に移る. したがって, 部分積分を使って次のように計算できる.

$$J_3=\int_0^{\pi/4}d\theta\int_a^b r\log r\,dr=\frac{\pi}{4}\left\{\left[\frac{r^2}{2}\log r\right]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b r\,dr\right\}=\frac{\pi}{16}\left\{b^2(2\log b-1)-a^2(2\log a-1)\right\}$$

(4) ここでは, 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって解く. D が中心 $(1,0)$ で半径 1 の円の上半分だから, (r,θ) の動く領域は $E=\{(r,\theta)\,|\,0\leqq r\leqq 2\cos\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\pi/2\}$ となる (微積の教科書 p.120 も参照). r, θ の順に積分して,

$$\begin{aligned}J_4&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\,(r\sin\theta)^2\,rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{\cos\theta}\,(\sin^2\theta)\,r^3\sqrt{r}\,dr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}\sin^2\theta\left[\frac{2}{9}r^4\sqrt{r}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}\left(\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}-\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\right)=\frac{256\sqrt{2}}{945}\end{aligned}$$

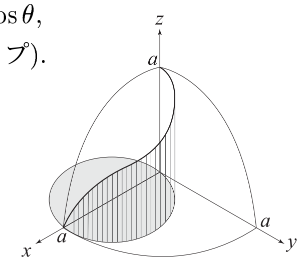
[付記] 極座標変換をしない累次積分でも答えを導ける (第 10 回演習の $\boxed{1}$(6) を復習しながら, 計算してみよう).



$\boxed{3}$ (1) 題意の部分 $\{(x,y,z)\,|\ x^2+y^2\leqq a^2,\ 0\leqq z\leqq x\}$ の xy 平面への射影は半円 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0\}$ で, 求める体積は $V_1=\iint_D x\,dxdy$ で与えられる. 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ で, D は $E=\{(r,\theta)\,|\,0\leqq r\leqq a,-\pi/2\leqq\theta\leqq\pi/2\}$ に対応するので,

$$V_1=\iint_E(r\cos\theta)\,r\,drd\theta=2\left(\int_0^a r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)=\frac{2}{3}a^3$$

(2) 題意の部分 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqq ax,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leqq z\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$ は xy 平面 $(z=0)$ や xz 平面 $(y=0)$ に関して対称だから, $x,y,z\geqq 0$ の部分の体積を 4 倍すればよい. $D=\{(x,y)\,|\,(x-\frac{a}{2})^2+y^2\leqq(\frac{a}{2})^2,\ y\geqq 0\}$ (半円) として, 求める体積は $V_2=4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$ となる. 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で, D は $E=\{(r,\theta)\,|\,0\leqq r\leqq a\cos\theta,0\leqq\theta\leqq\pi/2\}$ に移る ($\boxed{2}$(3) と同じタイプ).



$$\begin{aligned}V_2&=4\iint_E\sqrt{a^2-r^2}\,r\,drd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{d}{dr}\left\{\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{-3}\right\}dr\\&=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[(a^2-r^2)^{3/2}\Big]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{2a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1) $u=x+y,\ v=y+z,\ w=z+x$ とおくと,
$x=(u-v+w)/2,\ y=(u+v-w)/2,\ z=(-u+v+w)/2$ だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}x_u&x_v&x_w\\y_u&y_v&y_w\\z_u&z_v&z_w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

と計算できる. このとき, V は $W=\{(u,v,w)\,|\,0\leqq u\leqq 1,0\leqq v\leqq 1,0\leqq w\leqq 1\}$ に移り, $(x+y)(y+z)(z+x)=uvw$ だから,

$$K_1=\iiint_W uvw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{2}\int_0^1du\int_0^1dv\int_0^1uvw\,dw=\frac{1}{2}\int_0^1u\,du\int_0^1v\,dv\int_0^1w\,dw=\frac{1}{16}$$

(2) 3 次元の極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ に対して, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}x_r&x_\theta&x_\varphi\\y_r&y_\theta&y_\varphi\\z_r&z_\theta&z_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi&r\cos\theta\cos\varphi&-r\sin\theta\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&r\cos\theta\sin\varphi&r\sin\theta\cos\varphi\\\cos\theta&-r\sin\theta&0\end{vmatrix}=\cdots=r^2\sin\theta$$

となる (一度は計算しておこう). このとき V は $W=\{(r,\theta,\varphi)\,|\,a\leqq r\leqq b,0\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$ に移るから,

$$K_2=\iiint_W\frac{1}{r^p}r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\left(\int_a^b\frac{dr}{r^{p-2}}\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{p-3}\left(\dfrac{1}{a^{p-3}}-\dfrac{1}{b^{p-3}}\right)&(p\neq 3)\\4\pi\log\dfrac{b}{a}\quad(p=3)\end{cases}$$