2017 数学演習第二 第 13 回「行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化」解答例

$\boxed{1}$ (1) $F_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ 1 & \lambda-4 & -1\\ -2 & 4 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. A の固有値は $\lambda=1,2$. (2) $\lambda=1$ のとき， $E-A=\begin{bmatrix}0&-2&-1\\1&-3&-1\\-2&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&-2&-1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$.
$\lambda=2$ のとき， $2E-A=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\1&-2&-1\\-2&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, 基本解は $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. (3) $P=\begin{bmatrix}-1&2&1\\-1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$ とおいて, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$. (4) $A^n=\left(P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&2^n\end{bmatrix}P^{-1}$. ここで $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\-1&3&1\\2&-4&-1\end{bmatrix}$ となることから，$A^n=\begin{bmatrix}1&-2+2^{n+1}&-1+2^n\\1-2^n&-2+3\cdot2^n&-1+2^n\\-2+2^{n+1}&4-2^{n+2}&2-2^n\end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-4&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$. A の固有値は $\lambda=3,-2$. $\lambda=3$ のとき，$3E-A=\begin{bmatrix}1&-1\\-4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. $\lambda=-2$ のとき，$-2E-A=\begin{bmatrix}-4&-1\\-4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1/4\\0&0\end{bmatrix}$ より, 固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$. よって $P=\begin{bmatrix}1&-1\\1&4\end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&\\&-2\end{bmatrix}$.
(2) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&3&7\\1&\lambda-2&-1\\-5&3&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$ より，固有値は $2,1,-1$．$\lambda=2$ のとき，$\begin{bmatrix}-4&3&7\\1&0&-1\\-5&3&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&3&3\\1&0&-1\\0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$．$\lambda=1$ のとき，$\begin{bmatrix}-5&3&7\\1&-1&-1\\-5&3&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$．
$\lambda=-1$ のとき，$\begin{bmatrix}-7&3&7\\1&-3&-1\\-5&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&-19&0\\0&-12&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$．よって，固有値 $2,1,-1$ の固有空間の次元は，それぞれ 1 次元．固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_{-1}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ が取れるので，$P=[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_{-1}]$ を取れば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$ となる．
(3) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&0\\1&\lambda&0\\-1&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ より，固有値は $2,3$．

$\lambda=2$ のとき, $\begin{bmatrix}-3&-6&0\\1&2&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\lambda=3$ のとき, $\begin{bmatrix}-2&-6&0\\1&3&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

という簡約化から，固有値 $2,3$ の固有空間の次元は 2 次元と 1 次元．一次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_2^{(1)}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_2^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$ が取れるので，$P=[\boldsymbol{p}_2^{(1)},\boldsymbol{p}_2^{(2)},\boldsymbol{p}_3]$ と取れば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$ となる．
(4) $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\1&\lambda-2&0\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ より，固有値は $1,2$．

$\lambda=1$ のとき, $\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\lambda=2$ のとき, $\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

という簡約化から，固有値 $1, 2$ の固有空間はいずれも 1 次元である．したがって固有空間の次元の和が 3 にならないので対角化できない．

(5) $|\lambda E_4 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1 & \lambda-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ -3 & -1 & \lambda-3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ より，固有値は $1, 2$．$\lambda = 1$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = 2$ のとき，$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．よって固有値 $1, 2$ の固有空間はともに 2 次元で，一次独立な固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ が取れるので，$P = [\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \boldsymbol{p}_2^{(1)}, \boldsymbol{p}_2^{(2)}]$ と取れば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ となる．

$\boxed{3}$ (1) 表現行列の定義から $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$．$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$．よって線形変換 f の固有値は $0, -1, 1$．$\lambda = 0$ のとき，$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = 1$ のとき，$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\lambda = -1$ のとき，$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ という簡約化から固有値 $0, 1, -1$ の固有空間の次元はすべて 1 次元．固有ベクトルとして，$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れるので，V の基底として $(-4\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_3, -2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3, -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)$ をとれば，f の表現行列は対角行列となる．

$\boxed{4}$ (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，任意の自然数 n に対して $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ が成り立つから，この関係を繰り返して使うと，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ となる．よって，A^n を求めればよい．$\boxed{1}$ と同様の方法で，$P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$ から，$A^n = P \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & 3^n - (-2)^n \\ 4 \cdot 3^n - (-2)^{n+2} & 3^n + (-2)^{n+2} \end{bmatrix}$．よって，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \{4 \cdot 3^n + (-2)^n\}\alpha + \{3^n - (-2)^n\}\beta \\ \{4 \cdot 3^n - (-2)^{n+2}\}\alpha + \{3^n + (-2)^{n+2}\}\beta \end{bmatrix}$．

(2) 微分方程式は $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \cdots (\star)$ と表される．$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ とおくと，$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$ が確かめられ，$(\star)$ は $P \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ となり，$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$．よって，$u'(t) = 3u(t), v'(t) = -2v(t)$ となり，解析学で学習した変数分離形で $u(t) = C_1e^{3t}, v(t) = C_2e^{-2t}$ (C_1, C_2 は任意定数) と計算できる．すると，$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{3t} \\ C_2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{3t} - C_2e^{-2t} \\ C_1e^{3t} + 4C_2e^{-2t} \end{bmatrix}$．